A mértani helyet a koordináta-geometria eljárásaival keressük meg. Vegyük a négyzet csúcsainak rendre az $A$ (0; 1), $B$ (-1; 0), $C$ (0; -1), $D$ (1; 0) pontot. Így a $\sqrt{2}$ oldalhosszúságú négyzetre vizsgáljuk a kérdést, de nem csorbítjuk az általánosságot, hiszen bármely két négyzet hasonló.

A keresett mértani hely szimmetrikus mindkét tengelyre. Ha ugyanis $P(x,\,y)$ megfelelő pont, akkor megfelel $P(-x,\,y)$ is, mert így $PB$ és $PD$ értéke csupán fölcserélődik, és ez nem változtatja meg a jobb oldal értékét a

$$\frac{PA+PC}{\sqrt{2}}=\max\,(PB,\,PD) \tag{1}$$

követelményben.

Továbbá a bal oldal értéke változatlan marad, ha $P$ helyére a $(x,\,-y)$ pont lép. Elég tehát az $x\geq 0$ esetre szorítkoznunk, ekkor a jobb oldal értéke

$$PB=\sqrt{(x+1)^2+y^2},$$

(1) pedig így alakul

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x+1)^2+y^2}\quad x\geq 0.$$

Négyzetre emelés után a két oldal egyező tagjait elhagyva

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}\cdot\sqrt{x^2+(y+1)^2}=2x.$$

Ez újabb négyzetre emelés után így rendezhető:

$$x^4+x^2(2y^2+2)+(y^2-1)^2=4x^2.$$

azaz

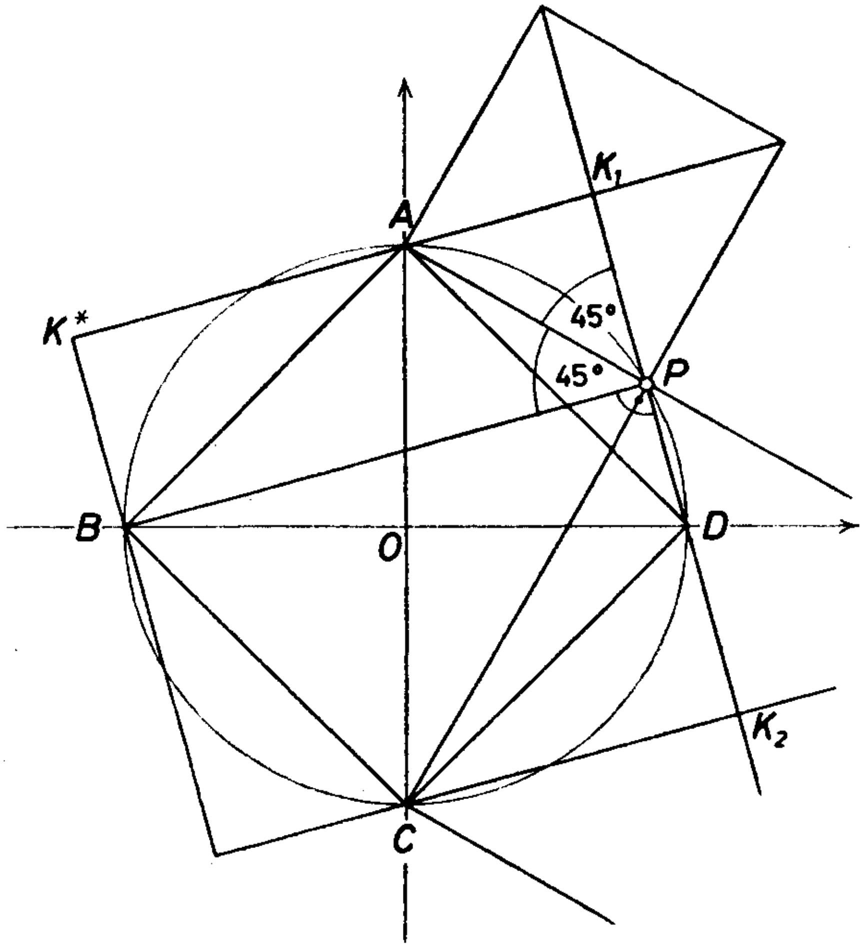
$$x^4+2x^2(y^2-1)+(y^2-1)^2=(x^2+y^2-1)^2=0,$$

végül

$$x^2+y^2-1=0\quad x\geq 0.$$

A kapott egyenlet az origó körüli egységkörnek az $y$ tengelytől jobbra eső félkörét jelenti, az $y$ tengelyen levő pontjaival együtt. Eszerint az előrebocsátottak értelmében minden megfelelő $P$ pont rajta van a kiindulási négyzet körülírt körén.

Megfordításul elemi geometriai meggondolással belátjuk, hogy a körülírt kör minden pontja megfelel $P$-ként. Ennek során elég a kör $DA$ negyedívének pontjait vizsgálnunk. Ha $P$ a $D$ vagy az $A$ végpontban van, akkor (1) jobb és bal oldalán egyaránt 2 ill. $\sqrt{2}$ áll.




A $PA/\sqrt{2}$ hosszúságot elénk állítják a $PK_1 = AK_1$ szakaszok, ahol $K_1$ a $PAC$ derékszögű háromszög $PA$ befogójához kívülről hozzáírt négyzet középpontja. Más szóval $PK_1$ és $AK_1$ a $K_1PA$ egyenlő szárú, derékszögű háromszög befogói. Ekkor nyilván $PK_1$ merőleges $PB$-re, és $K_1A$ párhuzamos $PB$-vel.

Ugyanígy $PC/\sqrt{2} = PK_2 = K_2C = K^*A$, ahol $K_2$ a $PC$ oldalú négyzet középpontja és $K^*$ a $K_2$ tükörképe az origóra, továbbá a $K_1K_2$ egyenes átmegy $P$-n, $D$-n és merőleges $PB$-re. Azt is mondhatjuk, hogy $K^*$ a $K_2$-nek az $OK_1$ egyenesre való tükörképe, hiszen merőleges szárú szögekként $K_1OK_2\sphericalangle = APC\sphericalangle$ derékszög. Ekkor pedig

$$\frac{PA}{\sqrt{2}} + \frac{PC}{\sqrt{2}} = PK_1 + PK_2 = K_1K_2 = K_1K^* = PB,$$

mert a tükrözés folytán $K^*B$ párhuzamos $K_2D$-vel, tehát merőleges $PB$-re, lévén $BPD\sphericalangle$ derékszög.