

$$\begin{aligned}
(1) \quad & x + y + z = 5 \\
(2) \quad & x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\
(3) \quad & xy + u + vx + vy = 0 \\
(4) \quad & yz + u + vy + vz = 0 \\
(5) \quad & zx + u + vz + vx = 0.
\end{aligned}$$

**Megoldás.** Vonjuk ki (3)-ból a (4)-et, ill. (5)-öt. Rendezés után az  $(y + v)(x - z) = 0$ , illetve az  $(x + v)(y - z) = 0$  összefüggéseket kapjuk. Ezekből arra következtethetünk, hogy  $x, y, z$  közül legalább kettő egyenlő. Ha ugyanis  $x \neq z$ , és  $y \neq z$  volna, akkor utóbbi két egyenletünkből  $y + v = 0$ , illetve  $x + v = 0$  adódik, s így  $x = y = -v$ .

Legyen például  $x = y$ . Ekkor (1) és (2)-ből

$$2x + z = 5, \quad 2x^2 + z^2 = 9.$$

Ezt megoldva, az  $x_1 = y_1 = 2, z_1 = 1$  és az  $x_2 = y_2 = 4/3, z_2 = 7/3$  megoldásokat kapjuk. Az  $(y + v)(x - z) = 0$  összefüggésből  $v_1 = -2, v_2 = -4/3$ , végül  $u$  értéke például (3)-ból könnyen számolható:  $u_1 = 4, u_2 = 16/9$ . Természetesen  $x = y$  helyett  $x = z$  vagy  $y = z$  is lehetséges, amiből négy további megoldás adódik.

Összefoglalva, az egyenletrendszernek hat megoldása van:

$x_1 = 2$	$y_1 = 2$	$z_1 = 1$	$u_1 = 4$	$v_1 = -2$
$x_2 = 4/3$	$y_2 = 4/3$	$z_2 = 7/3$	$u_2 = 16/9$	$v_2 = -4/3$
$x_3 = 2$	$y_3 = 1$	$z_3 = 2$	$u_3 = 4$	$v_3 = -2$
$x_4 = 4/3$	$y_4 = 7/3$	$z_4 = 4/3$	$u_4 = 16/9$	$v_4 = -4/3$
$x_5 = 1$	$y_5 = 2$	$z_5 = 2$	$u_5 = 4$	$v_5 = -2$
$x_6 = 7/3$	$y_6 = 4/3$	$z_6 = 4/3$	$u_6 = 16/9$	$v_6 = -4/3$