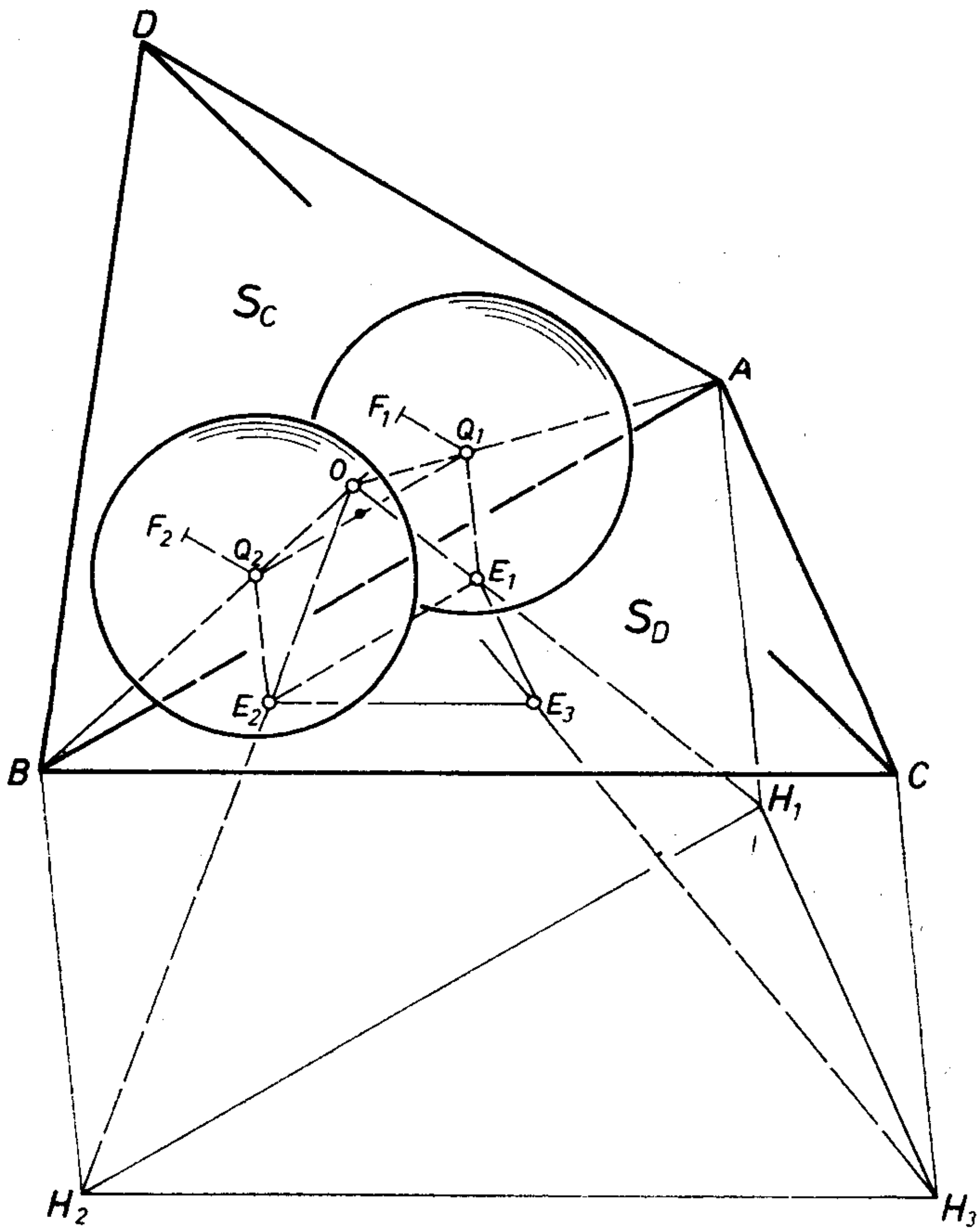
1. Tegyük fel, hogy az ABC alapon álló $ABCD$ gúlába sikerült beilleszteni az R sugarú G_i gömböket a követelményeknek megfelelően ($i = 1, 2, 3$) úgy, hogy az ABD oldallapot G_1 és G_2 érinti, a BCD lapot G_2 és G_3, végül CAD-t a G_3 és G_1. Jelöljük G_i középpontját Q_i-vel.



A Q_1, Q_2, Q_3 pontok mindegyike R távolságra van az ABC háromszög S_D síkjától, ennek a síknak ugyanarra a partjára esik, tehát a $Q_1Q_2Q_3$ háromszög síkja párhuzamos az S_D síkkal. S mivel a gömbök páronként érintik egymást, a $Q_1Q_2Q_3$ háromszög mindegyik oldala $2R$, a háromszög szabályos.

Megmutatjuk, hogy az ABC háromszög ugyancsak szabályos, ez tehát szükséges feltétele annak, hogy a gömbök beírhatók legyenek a gúlába. Nyilván elég például azt belátni, hogy a Q_1Q_2 egyenes párhuzamos az AB alapéllel.

Legyen G_i érintési pontja az alapsíkon E_i, továbbá az $ABD = S_C$ síkon F_i ($i = 1, 2$). Mivel $Q_1E_1 = Q_2E_2 = R$, és Q_1E_1, Q_2E_2 merőleges S_D-re, azért a Q_1Q_2 egyenes párhuzamos E_1E_2-vel. Megfordítva: S_D-ben az E_1E_2-vel párhuzamos egyenesek – és csak ezek – párhuzamosak Q_1Q_2-vel. Ugyanígy S_C egyenesei közül az F_1F_2-vel párhuzamosak – és csakis ezek –párhuzamosak Q_1Q_2-vel. Ámde S_D-nek és S_C-nek egyetlen közös egyenese van, az AB élegyenes, ez tehát párhuzamos Q_1Q_2-vel (és E_1E_2-vel, F_1F_2-vel is). – Ezzel beláttuk, hogy az ABC alapidom valóban szabályos háromszög.

Be fogjuk látni, hogy ez a feltétel elegendő is a megfelelő gömbhármas létezéséhez. Eközben egyszersmind meg is szerkesztjük a gömbközéppontokat:

Legyen a gúla beírt gömbjének középpontja O. Ez mind a 4 lapsíktól egyenlő távolságra van, az OA, OB, OC egyenes pontjai pedig rendre attól a 3–3 lapsíktól vannak egyenlő távolságra, amelyek A-ban, B-ben, ill. C-ben futnak össze. Ezek az A, ill. B, ill. C csúcsú (és a gúlát tartalmazó) ún. *triéder* belső lapszögfelező síkjainak közös egyenesei.

Eszerint Q_i rendre OA-n, OB-n, ill. OC-n van, és a Q_i, valamint E_i pontokkal meghatározott K háromoldalú szabályos hasáb úgy van beleírva az $OABC$ gúlába, hogy E_i csúcsai ennek ABC alapsíkján vannak, Q_i csúcsai pedig az O-ban összefutó oldaléleken.

Ennek a hasábnak a (fedőlapján levő) Q_i csúcsait egy csapásra megkaphatjuk egy O centrumú hasonlósági transzformáció útján. Megszerkesztjük az ABC lapra kifelé (szemléletesen mondva lefelé, alája) azt a K' egyenes hasábot, melynek m oldaléle fele akkora, mint az ABC háromszög oldalainak közös hossza, K' tehát hasonló a keresett K-hoz. Legyen az A, B, C-ből lefelé kiinduló oldalél végpontja rendre H_i – az általuk meghatározott háromszög szabályos, síkja párhuzamos S_D-vel. A K' lapjai páronként párhuzamosak a keresett K lapsíkjaival, továbbá fedőlapjaik csúcsai olyan párokba kapcsolhatók, melyek összekötő egyenesei átmennek O-n. Ezért mondhattuk előre, hogy O centrumú hasonlósági transzformációt használunk. Így az OH_i egyenesnek S_D-vel való metszéspontja a keresett E_i-t adja, az E_i-n át S_D-re állított merőleges egyenes pedig éppen Q_i-t metszi ki az OA, OB, ill. OC szakaszból.

Ugyanis ekkor E_iQ_i párhuzamos a hasáb H_i-n átmenő oldalélével, amit S_D -re merőlegesen szerkesztettünk, és pl. E_1Q_1 benne van az OAH_1 síkban.

Így a $H_1H_2H_3$ háromszöget, az $E_1E_2E_3$ háromszögbe átvivő hasonlósági transzformáció a $Q_1Q_2Q_3$ háromszögbe viszi át az ABC háromszöget, tehát K'-t a K-ba. Eszerint $Q_1Q_2Q_3$ háromszög szabályos, és, $Q_1Q_2 : Q_1E_1 = AB : : AH_1 = 2 : 1$.

Ha tehát Q_i körül Q_iE_i sugárral G_i gömböket írunk ($i = 1, 2, 3$), ezek páronként érintik egymást, és mindegyik érinti S_D-t. És ha vesszük S_D-nek az AQ_1Q_2 síkra való tükörképét, ez egyfelől érinti G_1-et és G_2-t, másfelől azonos lesz S_C-vel, mert a tükrözés síkja tartalmazza O-t. Gömbjeink eszerint valóban teljesítik a követelményeket.

2. Ami a Q_i pontok megszerkesztését illeti – adottnak tekintve a szabályos háromszög alapú $ABCD$ gúlát –, elvi kérdés, mit értsünk szerkesztésen a térben, amikor a szokásos szerkesztéseinknek – kimondatlanul – állandó hordozója egy sík papírlap. Megoldóink ösztönösen helyesen dolgoztak, itt viszont ki is mondjuk az elveket:

Bármely *adott* (vagy korábbi lépés útján *meghatározott*) síkban szerkeszthetünk a síkbeli szabályok szerint.

Adott (meghatározott) a sík 3 ismert pontjával, hacsak ezek nincsenek egy egyenesben; egyértelmű ezzel a következő 3 változat: egyenes és rajta kívül fekvő pont, metsző egyenespár, párhuzamos egyenespár.

Ha adott egy sík és egy egyenes (amelynek van a síkon kívül levő pontja is), akkor adottnak tekintjük a közös pontjukat is.

Nem részletezzük, hogyan vezethető vissza ezekre merőleges sík és egyenes, ill. párhozamos sík és egyenes szerkesztése adott egyeneshez vagy síkhoz, valamint síkok metszésvonalának szerkesztése.

3. Ebben az értelemben csak a gúla O pontjának szerkesztését részletezzük, ami tulajdonképpen csak lapszög felezését jelenti. Az AB élű lapszög szárlapjaiból, S_D-ből és S_C-ből kimetsszük egy–egy egyenesüket, az AB-n választott X ponton átmenő és AB-re merőleges sík révén. A két egyenes szögét felező egyenes AB-vel együtt meghatározza a szögfelező síkot.

Megjegyzés. A kitűző 1963-ban szerkesztette javaslatát. Hozzátette, hogy az 1962. évi Arany–verseny egyik feladatát vitte át térre: Adott egy háromszög. Szerkesszünk két egyenlő sugarú kört úgy, hogy mind a két kör érintse a háromszög két oldalát és ezen kívül egymást is érintsék. (A megoldást lásd KöMaL 25. (1962) 104. oldal.)