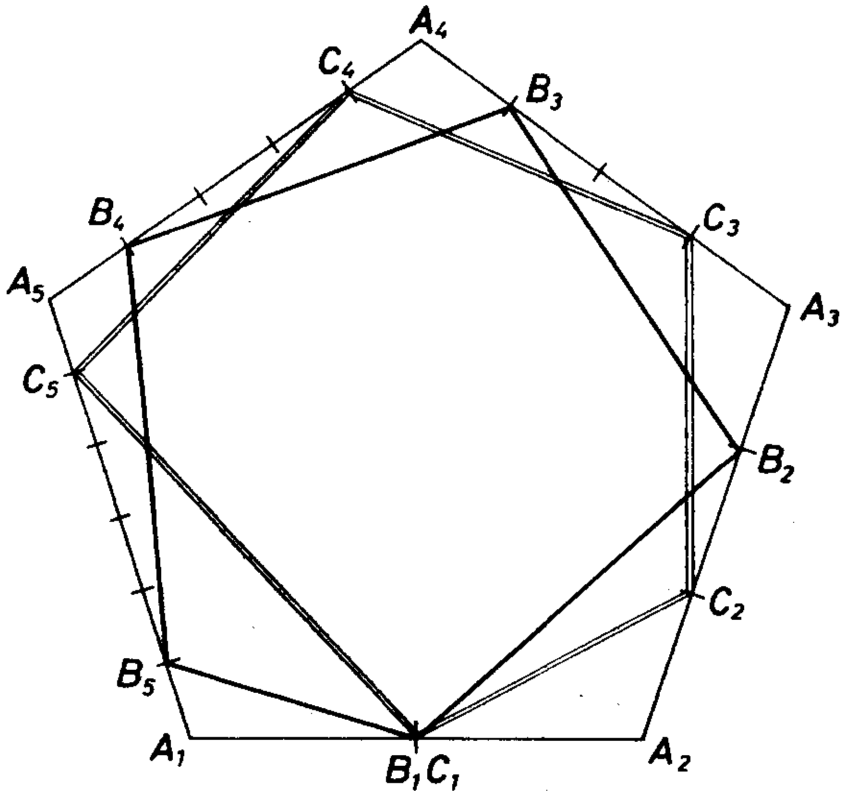
A feladat állítása egyenértékű azzal, hogy a $B_1B_2\dots B_n$, $C_1C_2\,\dots C_n$ sokszögeket az $A_1A_2\dots A_n$ sokszöggé kiegészítő $B_1A_2B_2$, $B_2A_3B_3$, …, $B_nA_1B_1$; illetve $C_1A_2C_2$, $C_2A_3C_3$, …, $C_nA_1C_1$ háromszögek területének összege egyenlő.



Legyen az $A_1A_2\dots A_n$ konvex szabályos sokszög szöge α, és oldala egységnyi. Ekkor a feladat szerint $i=1,\,2,\,\dots,\,n-1$ esetében

$$B_iA_{i+1}=\frac{1}{i+1},\;\;A_{i+1}B_{i+1}=(i+1)\cdot\frac{1}{i+2},\;\;C_iA_{i+1}=\frac{i}{i+2},\;\;A_{i+1}C_{i+1}=\frac{1}{i+2}.$$

A $B_iA_{i+1}B_{i+1}$, ill. a $C_iA_{i+1}C_{i+1}$ háromszög területe:

$$T(B_iA_{i+1}B_{i+1})=\frac{1}{2}B_iA_{i+1}\cdot A_{i+1}B_{i+1}\cdot\sin\alpha=\frac{\sin\,\alpha}{2}\cdot\frac{i+1}{(i+1)\,(i+2)},$$
$$T(C_iA_{i+1}C_{i+1})=\frac{1}{2}C_iA_{i+1}\cdot A_{i+1}C_{i+1}\cdot\sin\,\alpha=\frac{\sin\,\alpha}{2}\cdot\frac{i}{(i+1)\,(i+2)}.$$

$i=n$ esetén pedig hasonlóan

$$B_nA_{n+1}=B_nA_1=\frac{1}{n+1},\;\;A_1B_1=A_1C_1=\frac{1}{2}\quad\text{és}\quad C_nA_{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

alapján

$$T(B_nA_1B_1)=\frac{\sin\,\alpha}{2}\cdot\frac{1}{2(n+1)},\quad T(C_nA_1C_1)=\frac{\sin\,\alpha}{2}\cdot\frac{n}{2(n+1)}.$$

Így a következőt kell bizonyítanunk:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i+1}{(i+1)\,(i+2)}+\frac{1}{2(n+1)}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{(i+1)\,(i+2)}+\frac{n}{2(n+1)}.$$

A bal és a jobb oldal különbsége:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{(i+1)\,(i+2)}+\frac{1-n}{2(n+1)}=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i+2}\right)+\frac{1-n}{2(n+1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1-n}{2(n+1)}.$$

Ez pedig 0. Ezzel az állítást igazoltuk.

Kós Géza (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., I. o. t.)