Elsőként definiálunk egy prímszámokból álló $\{p_k\}$ sorozatot. Legyen $p_1 = 2$. Ha p_k-t már meghatároztuk, legyen p_{k+1} egy (például a legkisebb) p_k^3 és $(p_k + 1)^3$ közé eső prím. Ilyen prím a megadott tétel szerint létezik. Legyen

$$a_k = \sqrt[3^k]{p_k}, \qquad b_k = \sqrt[3^k]{p_k + 1}.$$

Mivel $p_k^3 < p_{k+1}$, azért $a_k < a_{k+1}$. Továbbá $b_{k+1} < b_k$ is teljesül, hiszen $(p_k + 1)^3 - 1$ osztható p_k-val, ezért nem lehet prím, és így $p_{k+1} + 1 < (p_k + 1)^3$. Ezek szerint az $[a_k,\, b_k]$ zárt intervallumok egymásba skatulyázottak, így Cantor tétele alapján van közös pontjuk, jelöljük ezt a-val. Megmutatjuk, hogy ez az a szám kielégíti a feladat feltételeit. Tudjuk, hogy minden k-ra $a_k \le a \le b_k$. Itt egyenlőség egyik oldalon sem állhat fenn, mert $a \in [a_{k+1},\, b_{k+1}]$ is igaz, és $[a_{k+1},\, b_{k+1}]$ végpontjai az $[a_k,\, b_k]$ intervallum belsejébe esnek. Így $a_k < a < b_k$, tehát

$$p_k = a_k^{3^k} < a^{3^k} < b_k^{3^k} = p_k + 1,$$

azaz a^{3^k} egész része éppen p_k, ami prímszám tetszőleges k pozitív egészre. Végül $a_1 = \sqrt[3]{2} < a$ miatt $a > 1$ is teljesül.

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Megjegyzések. **1.** A feladatban kimondott érdekes állítást elsőként *W. H. Mills* amerikai matematikus publikálta még 1947-ben.

2. Ha tudjuk, hogy minden elegendően nagy n-re található prímszám n^c és $(n + 1)^c$ között, akkor a megoldásban leírtakhoz hasonlóan bizonyítható, hogy van olyan $a > 1$ valós szám, melyre a^{c^k} egész része prímszám minden k pozitív egészre. c legkisebb értéke, melyre a fenti állítást eddig bizonyítani tudták, $12/5$. Híres és mindmáig eldöntetlen probléma, hogy vajon n^2 és $(n + 1)^2$ között mindig található-e prímszám.

3. Igaz a következő állítás is: minden $c > 1$ valós számhoz található olyan $a > 1$ valós szám, hogy c^{a^k} egész része prímszám minden pozitív egész k-ra.