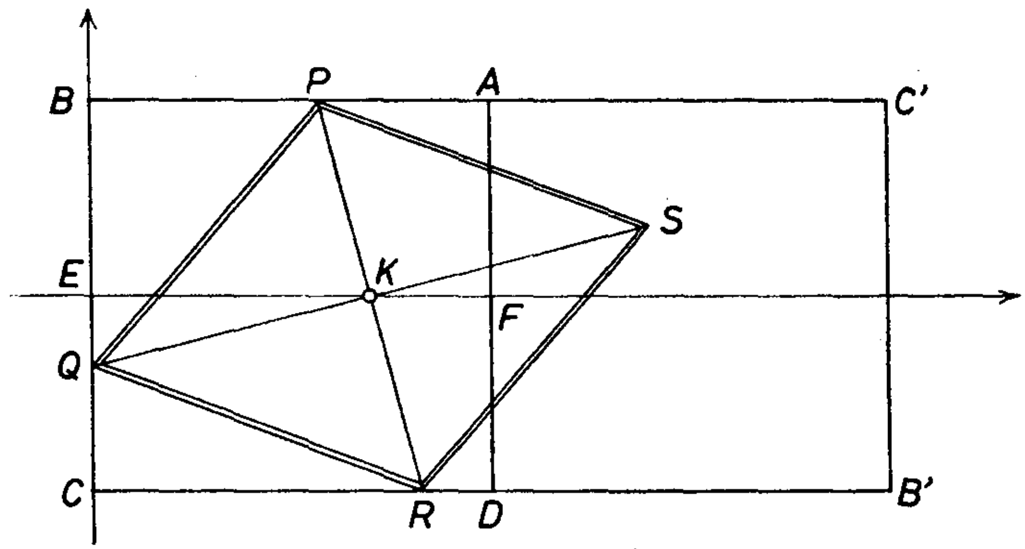
Jelöljük a rombusznak az AB, BC, CD oldalszakaszon levő csúcsát rendre P, Q, R betűvel, és legyen még E, F a négyzet BC, AD oldalának felezőpontja. A rombusz K középpontja – mint a PR szakasz felezőpontja az EF szakaszra esik, a kérdéses S negyedik csúcs pedig Q-nak K-ra vonatkozó tükörképe. Következésképp S pontja lesz a $BC'B'C$ téglalapnak, ahol $B'C'$ a BC oldalnak F-re vonatkozó tükörképe; de S nem pontja a BC szakasznak.



1. ábra

Az S pontok által befutott halmazt abban a koordináta–rendszerben írjuk le, amelynek origója E, továbbá F az $(1;\,0)$ pont, ennélfogva B koordinátái $(0,\,1/2)$. Legyen még $S(x,\,y)$ a $BC'B'C$ téglalap egy pontja, vagyis teljesüljenek az

(1) $$0 < x \le 2, \quad -1/2 \le y \le 1/2$$

egyenlőtlenségek. Nézzük meg, milyen további feltételeket kell tennünk x-re és y-ra, hogy S egy megfelelő rombusz negyedik csúcsa lehessen.

Mivel K felezi a QS szakaszt, továbbá rajta van az EF egyenesen, azért Q és K koordinátái szükségképpen

$$K(x/2,\,0), \quad Q(0,\,-y).$$

Az (1) föltevés miatt így Q a BC szakasz pontja lesz. A rombusz P és R csúcsát a K-ban QS-ra állított merőleges egyenes metszi ki az AB, illetve CD egyenesből, a metszéspontok koordinátái

$$P\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{x},\,\frac{1}{2}\right), \qquad R\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{x},\,-\frac{1}{2}\right).$$

Ha S egy megfelelő rombusz negyedik csúcsa, annak további csúcsai csak a most kapott P, Q, R pontok lehetnek. Ezért $S(x,\,y)$ akkor és csak akkor tartozik hozzá a keresett idomhoz, ha (1) mellett még a

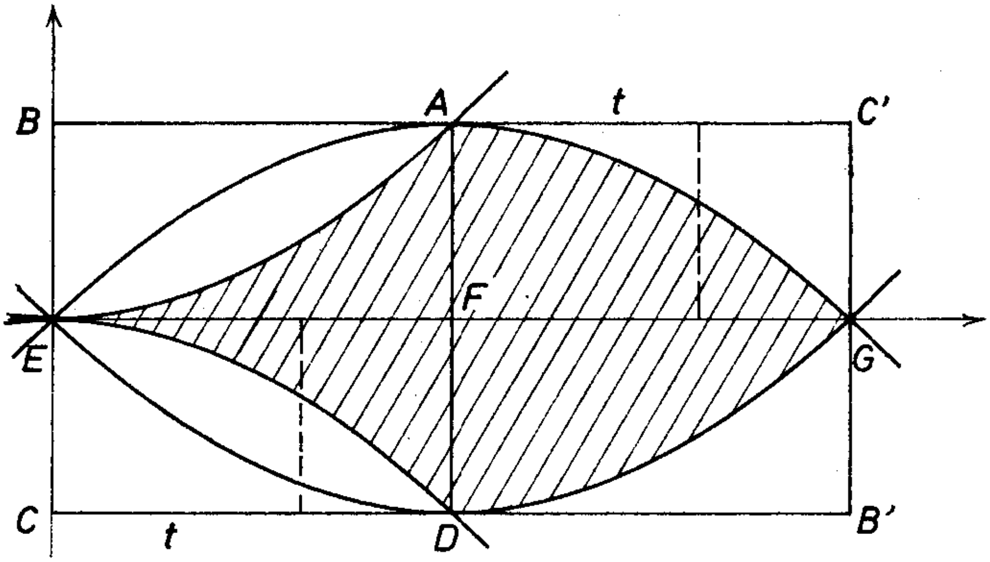
(2) $$0 \le \frac{x}{2}-\frac{y}{x} \le 1, \qquad 0 \le \frac{x}{2}+\frac{y}{x} \le 1$$

föltételek is teljesülnek. Így feladatunk az, hogy meghatározzuk annak az idomnak a területét, melyet az (1) és (2) feltételt kielégítő, (x,y) koordinátájú pontok alkotnak.

A (2) egyenlőtlenségeket az (1) szerint pozitív x-szel végigszorozva, majd átrendezve

(3) $$-x^2 \le 2y \le x^2, \qquad -1+(1-x)^2 \le 2y \le 1-(1-x)^2.$$

A (3) egyenlőtlenségek által definiált idomot láthatjuk a 2. ábrán.



2. ábra

A görbe vonalak egybevágó parabolaívek. Mivel ez része a $BC'B'C$ téglalapnak, azért ennek és csak ennek a pontjai teljesítik (1)-et és (2)-t is. Következésképp ennek az idomnak a területét kell meghatároznunk.

(3)-ból leolvasható, hogy az idomnak az $AC'GF$ téglalapba eső része egybevágó az $EFDC$ téglalapból hiányzó résszel. Valóban, húzzuk meg az $AC'GF$ téglalapban az AF-fel párhuzamos, AF-től t távolságra levő, $1/2$ hosszúságú szakaszt. Idomunk ezt a szakaszt két részre vágja: az alsó

$$\frac{1}{2}(1-[1-(1+t)]^2)=\frac{1}{2}(1-t^2)$$

hosszúságú része az idomhoz tartozik, a felső, $t^2/2$ hosszúságú rész már nem. Hasonlóan elvágva az $EFDC$ téglalapot, itt a felső $t^2/2$ hosszúságú rész tartozik az idomhoz, az alsó, $(1-t^2)/2$ hosszúságú rész nem. Következésképp a kérdéses idomnak a két téglalapban található része éppen akkora területű, mint az $EFDC$ téglalap.

Hasonlóan igazolható, hogy az $FGB'D$ és $BAFE$ téglalapokba eső részek együttesen akkora területűek, mint a $BAFE$ téglalap. A keresett idom területe tehát megegyezik az $ABCD$ négyzet területével.