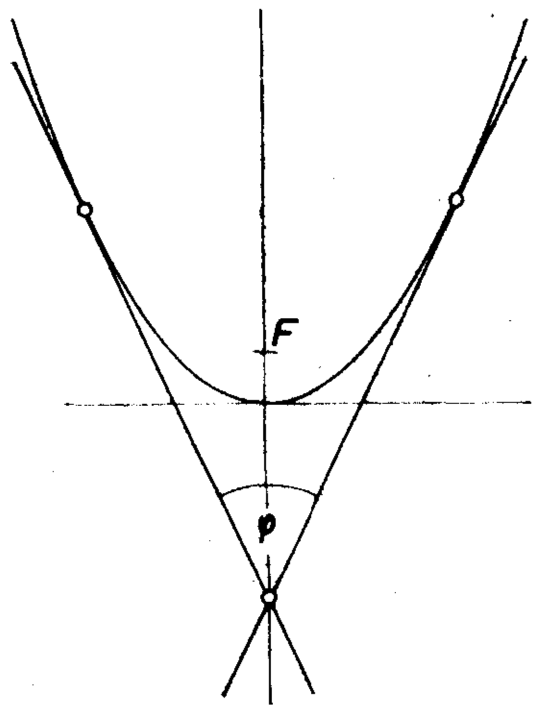
**I. megoldás.** Vizsgáljuk meg, hogy mi lehet a közös része egy egyenesnek és egy parabola tartománynak. Vegyük föl a koordináta–rendszert úgy, hogy a parabola egyenlete $y = x^2$ legyen, ekkor az egyenes egyenlete vagy $y = ax + b$, vagy $x = c$ alakú ($a, b, c$ tetszőleges). Az $x = c$ egyenletű egyenesek párhuzamosak a parabola tengelyével, ezek a parabola tartományt félegyenesben metszik.

Az $y = ax + b$ egyenes és a parabola tartomány közös részének koordinátái kielégítik az $x^2 \leqq ax + b$ és $y = ax + b$ feltételeket. Látható, hogy ez egy szakaszra teljesül, vagy nincs közös rész.

Tegyük föl most, hogy adott a síkon véges sok parabola tartomány, és válasszunk egy olyan egyenest, mely nem párhuzamos egyik parabola tengelyével sem. Ebből az egyenesből a parabolák legfeljebb véges sok szakaszt fednek le, tehát még ezt az egyenest sem fedik le teljesen a parabola tartományok, ennélfogva az egész síkot sem.

**II. megoldás.** Két segédtételt használunk fel,

**1.** *segédtétel. Bármely parabola tartomány lefedhető tetszőlegesen kicsi pozitív $\varphi$ szögű tartománnyal.*

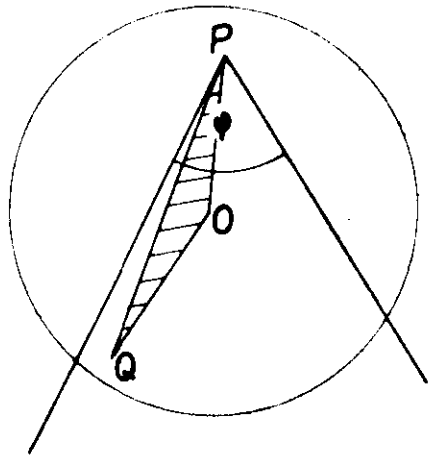



Válasszuk úgy a derékszögű koordinátarendszer tengelyeit, hogy a parabola egyenlete $y = x^2/2p$ legyen, ahol $p$ a fókusz és a vezéregyenes távolsága. Az $(x_0,\ x_0^2/2p)$ ponthoz húzott érintő meredeksége megegyezik az $y = x^2/2p$ függvény deriváltjának az $x_0$ helyen vett értékével, azaz $x_0/p$-vel. Ha $|x_0|$ nő, akkor a meredekség abszolút értéke is minden határon túl nő. Így az érintőnek az $y$ tengellyel bezárt szöge tetszőlegesen kicsire csökkenthető. A $(-x_0,\ x_0^2/2p)$ és $(x_0,\ x_0^2/2p)$ pontokhoz húzott érintők által meghatározott szögtartomány lefedi a parabola tartományt. A két határoló félegyenes 2-szer akkora szöget zár be egymással, mint amekkora szöget az $y$ tengely és az $(x_0,\ x_0^2/2p)$ ponthoz húzott érintő közrezár, és ez a szög is tetszőlegesen kicsire csökkenthető.

Vegyünk fel a síkon $n$ db parabola tartományt, s fedjük le e tartományok mindegyikét egy, közös $\varphi$ szögű tartománnyal, ahol $0 < \varphi < \pi/2n$. Ezzel többet fedünk le a síkból, mint a parabola tartományok.

Jelöljük a szögtartományok csúcsait $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n$-nel és $r$-rel a $P_1P_i$; távolságok legnagyobbikát, $i = 2,\ 3,\ \ldots,\ n$. Mivel véges sok $(n-1)$ db szakasz maximálisát vettük, így $r$ is véges. A $P_1 = O$ középpontú, $r$ sugarú körlap tartalmazza $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n$ mindegyikét. Látni fogjuk, hogy a szögtartományok már ezt a körlapot sem fedik le.

**2.** *segédtétel. Ha egy hegyesszög–tartomány $P$ csúcsa egy $r$ sugarú kör határán vagy a belsejében van, akkor a szögtartomány legfeljebb $2r^2 \cdot \varphi$ területű részét fedi le a körnek, ahol $\varphi$ a szögtartomány mértéke radiánban.*




Legyen ugyanis $Q$ a szögtartomány és a körlap tetszőleges közös pontja. Mivel $P$ és $Q$ az $O$ középpontú, $r$ sugarú körlap pontjai, így $OP \leqq r$ és $OQ \leqq r$. A háromszög – egyenlőtlenség szerint $PQ \leqq OP + OQ \leqq 2r$, tehát $Q$ benne van a $P$ középpontú $2r$ sugarú, $\varphi$ szögű körcikkben. Ez a körcikk tartalmazza tehát a szögtartomány és a kör közös részét, s a közös rész területe emiatt legfeljebb akkora, mint a körcikk területe, ami $T = 2r^2\varphi$.

Ezek szerint a $P_1,\ P_2,\ \dots,\ P_n$ csúcsú szögtartományok bármelyike legföljebb $T = 2r^2\varphi$ területű részt fed le a $P_1 = O$ középpontú $r$ sugarú körből. Az $n$ db szögtartomány legfeljebb $n \cdot T$ területet fed le a körlapból, az pedig $\varphi$ megválasztása folytán kisebb, mint $r^2\pi$, a kör területe, vagyis a szögtartományok együtt valóban nem fedik le a kört. Így nem fedik le teljesen a síkot sem.

*Hetyei Gábor* (Pécs, Leöwey K. Gimn., IV. o. t.)