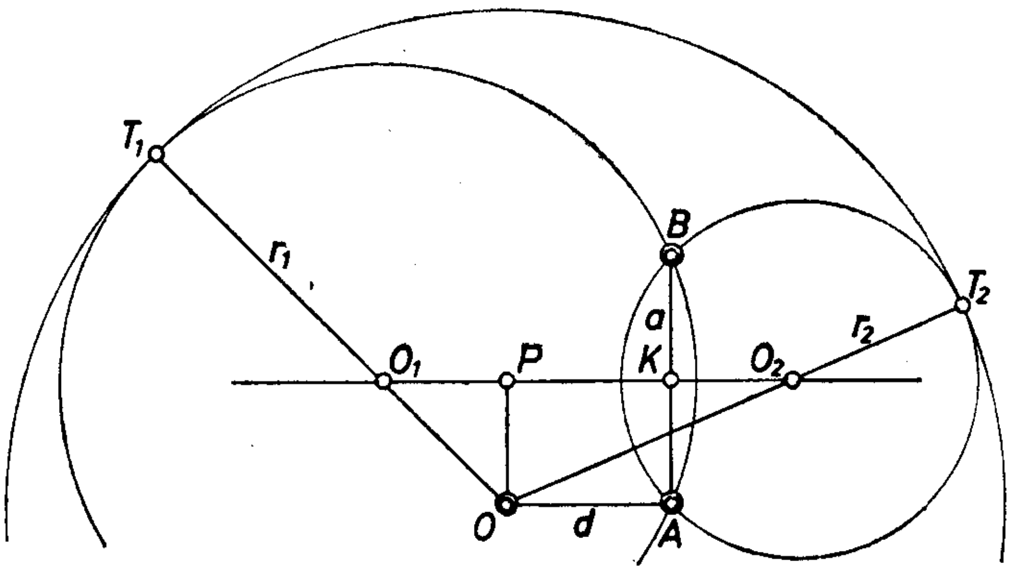
Jelöljük G középpontját O-val, a k-ra illeszkedő G_1 és G_2 gömbök középpontját O_1, ill. O_2-vel. Tekintsük a három középpont által meghatározott S síkot.



G_1 és G_2 centrálisa átmegy k-nak K középpontján és merőleges k síkjára, vagyis K is benne van S-ben, k síkja merőleges S-re, k-nak S-re való vetülete egy AB szakasz, melynek hossza egyenlő az átmérővel, és K felezi AB-t. Továbbá O-val együtt S-ben van O-nak k-n levő vetülete, tehát a vetület A és B egyike, legyen ez mondjuk A. (Az AB szakasz aszimmetrikus helyzete miatt S mindig egyértelműen meg van határozva.)

Síkunk mind a három gömbből főkört metsz ki. A belső gömbök főkörei átmennek az A, B pontokon, másrészt érintik a G-ből kimetszett főkört, hiszen a gömbök T_1, T_2 érintkezési pontjai nyilván rajta vannak az OO_1, ill. OO_2 centrálison. Így az alakzatból elég vizsgálnunk az S-beli metszetet: adva van az O középpontú, R sugarú k^* kör és a belsejében egy AB szakasz úgy, hogy az $OAB\sphericalangle$ derékszög; arról a két körről van szó, amelyek átmennek A-n és B-n, továbbá érintik k^*-ot. Azt kell belátnunk, hogy az érintő körök sugarainak összege R.

Legyen az O_i középpontú érintő gömb sugara r_i – tehát a főköré is –, $AB = 2a(< 2R), AO = d(< R)$ és O vetülete O_1O_2-n P, tehát $OPKA$ derékszögű négyszög.

Az O_iKA derékszögű háromszögekből $(i = 1,\ 2)$ $O_iK = \sqrt{r_i^2 + a^2}$, és igy a $K,\ O_i,\ P$ pontok minden helyzetében $O_iP = |O_iK \pm d|$ valamelyik előjellel, tehát az OO_iP háromszögből Pitagorasz tételével

$$\left(\sqrt{r_i^2 + a^2} \pm d\right)^2 + a^2 = (R - r_i)^2, \qquad (i = 1,\ 2)$$

azaz

$$\pm 2d\sqrt{r_i^2 + a^2} = R2 - 2Rt_i - d^2.$$

Ebből négyzetre emeléssel másodfokú egyenletet kapunk r_i-re:

$$4(R^2 - d^2)r_i^2 - 4R(R^2 - d^2)r_i + (R^2 - d^2)^2 + 4a^2d^2 = 0,$$

és ez egyaránt érvényes r_1-re, r_2-re. Más gyöke tehát nem lehet, ennélfogva gyökeinek összegére r_i, és r_i^2 együtthatói hányadosának (−1)-szereséből

$$r_1 + r_2 = R,$$

ezt kellett bizonyítanunk.