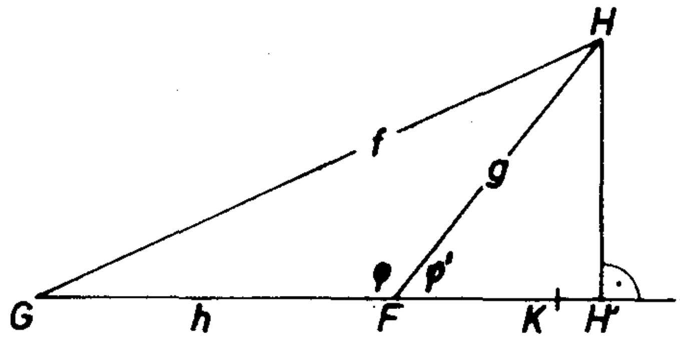
Előrebocsátunk két segédtételt.

I. *Hasonló háromszögek izoperimetrikus hányadosa egyenlő.*

Ha ugyanis a hasonlóság aránya $1 : \lambda$, akkor a második háromszög kerülete λ-szorosa az első háromszög kerületének, a második háromszög területe pedig λ^2-szerese az első háromszög területének, így valóban

$$\frac{t_2}{p_2^2} = \frac{\lambda^2 t_1}{(\lambda p_1)^2} = \frac{t_1}{p_1^2}.$$

2. *Ha egy háromszög egyik belső szöge 120°-nál nagyobb, akkor ezt a szöget közrezáró oldalak közül az egyikhez hozzáadva a másik oldal felét, a kapott összeg kisebb, mint a harmadik oldal.*



1. ábra

Ennek igazolására tekintsük az FGH háromszöget, melynek F-nél levő φ szöge 120°-nál nagyobb, vagyis $\varphi' = 180^\circ - \varphi < 60^\circ$ (1. ábra).

Legyen H' a H csúcs merőleges vetülete a GF egyenesen, továbbá K az FH' félegyenesen az a pont, amelyre $FK = FH/2$. Ekkor

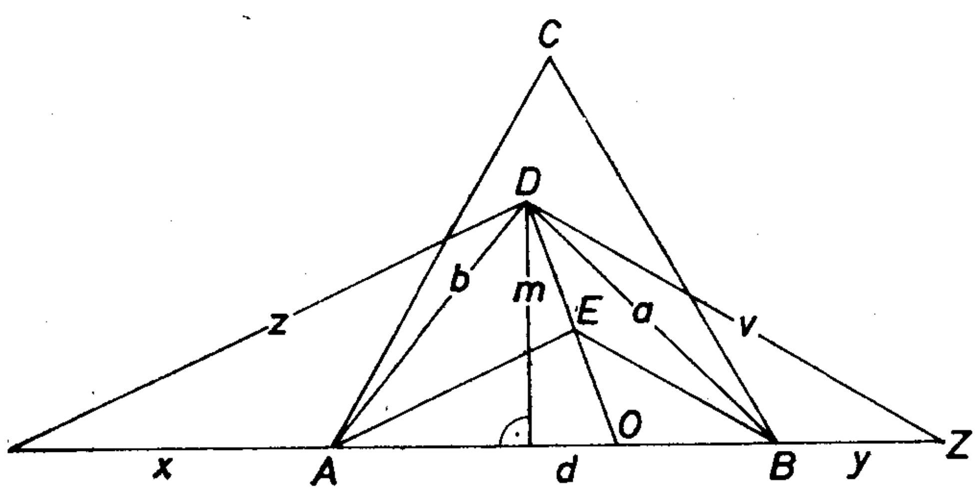
$$FK = FH\cos 60^\circ \leq FH\cos\varphi' = FH',$$

és így

$$h + \frac{g}{2} = GF + FK \leq GF + FH' = GH' < GH = f,$$

ahogyan állítottuk.

Most rátérünk a feladat állításának igazolására. Jelöljük O-val a DE egyenesnek AB-vel való metszéspontját, ez a feltevések szerint A és B között van. Nagyítsuk az ABE háromszöget az O centrumból úgy, hogy E képe D legyen, továbbá jelöljük A és B képét ebben a nagyításban V-vel, ill. Z-vel.



2. ábra

Ekkor a VZD háromszög izoperimetrikus hányadosa a hasonlóság miatt (1.segédtétel) egyenlő az ABE háromszög izoperimetrikus hányadosával, így elegendő belátnunk, hogy az ABD háromszög izoperimetrikus hányadosa nagyobb, mint a VZD háromszög izoperimetrikus hányadosa.

Jelölje m a háromszögek közös magasságát, továbbá vezessük be a $BD = a,\ AD = b,\ AB = d,\ DZ = v,\ DV = z,\ AV = x$ és $BZ = y$ jelöléseket. Ezek felhasználásával a bizonyítandó állítás a következő alakot ölti:

$$\frac{\frac{1}{2}dm}{(a+b+d)^2} > \frac{\frac{1}{2}(x+d+y)m}{(x+d+y+v+z)^2},$$

Más formában:

$$\frac{d}{x+d+y} > \left(\frac{a+b+d}{x+d+y+v+z}\right)^2. \tag{1}$$

Az ABC háromszög szabályos voltából következik, hogy az ADV háromszög A-nál levő belső szöge, valamint a BDZ háromszög B-nél levő belső szöge nagyobb $120°$-nál, ezért a 2. segédtétel szerint $z > b + \frac{x}{2}$ és $v > a + \frac{y}{2}$, így

$$\frac{a+b+d}{x+d+y+v+z} < \frac{a+b+d}{a+b+d+\frac{3}{2}(x+y)} = k.$$

Az ABD háromszögben $d > a$ és $d > b$, mivel az a és b oldalakkal szemben $60°$-nál kisebb szögek, a d oldallal szemben viszont $60°$-nál nagyobb szög fekszik. Ha tehát az 1-nél kisebb pozitív k törtben $a+b+d$ helyére $3d$-t írunk, akkor a számlálót és a nevezőt ugyanannyival növeljük, így a tört értéke is növekszik. Ezért

$$\frac{a+b+d}{x+d+y+v+z} < \frac{3d}{3d+\frac{3}{2}(x+y)} = \frac{d}{d+\frac{1}{2}(x+y)}.$$

Most visszatérünk (1)-hez. Ha sikerülne belátnunk, hogy átalakításunk után is teljesül

$$\frac{d}{x+d+y} > \left(\frac{d}{d+\frac{1}{2}(x+y)}\right)^2$$

ezzel a feladat állítását igazolnánk. Ez viszont egyenértékű a következővel:

$$\left(d+\frac{1}{2}(x+y)\right)^2 > d(d+x+y),$$

itt pedig a bal és a jobb oldal különbsége

$$\frac{1}{4}(x+y)^2 > 0,$$

tekintve, hogy $x > 0$ és $y > 0$.

Végül igazoljuk a közben felhasznált

$$\frac{p}{q} < \frac{p+x}{q+x}, \quad \text{ha} \quad q > p > 0 \quad \text{és} \quad x > 0$$

egyenlőtlenséget. A jobb és a bal oldal különbsége

$$\frac{(q-p)x}{q(q+x)} > 0,$$

tehát az átalakítás helyes volt.

Fóris Zoltán (Bp., Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., IV. o. t.)