(1) $$a_1 = 1; \qquad a_{n+1} = \frac{1}{16}(1 + 4a_n + \sqrt{1+24a_n}),\ \text{ha } n \geq 1.$$

I. megoldás. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. $a_1 = 1$ és $a_2 = \dfrac{5}{8}$ racionálisak. Legyen most $n \geqq 2$ és tegyük fel, hogy $1 \leqq k \leqq n$ esetén a_k racionális, és lássuk be, hogy a_{n+1} is az! Mivel racionális számok összege, különbsége, szorzata és hányadosa szintén racionális, továbbá az indukciós feltevés szerint a_n is racionális, azért a_{n+1} pontosan akkor racionális, ha $\sqrt{1+24a_n}$, racionális. Azonban

$$\begin{aligned}1 + 24a_n &= 1 + 24\frac{1}{16}\ (1 + 4a_{n-1} + \sqrt{1+24a_{n-1}}) = \frac{5}{2} + 6a_{n-1} + \frac{3}{2}\sqrt{1+24a_{n-1}} = \\ &= \frac{1}{4}(10 + 24a_{n-1} + 6\sqrt{1+24a_{n-1}}) = \left(\frac{3+\sqrt{1+24a_{n-1}}}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

Az indukciós feltevés alapján $\sqrt{1+24a_{n-1}} = 16a_n - 1 - 4a_{n-1}$ racionális, tehát a_{n+1} is az, ahogyan kívántuk.

A teljes indukció elve alapján igazoltuk a feladat állítását.

II. megoldás. Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy

(2) $$a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3\cdot 2^{2n-1}},$$

amiből a feladat állítása kiolvasható.

$n = 1$-re (2) mindkét oldala 1. Tegyük fel, hogy (2) n-re teljesül, és lássuk be ebből, hogy $(n+1)$-re is igaz, vagyis

$$a_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3\cdot 2^{2n+1}}.$$

a_{n+1}-nek (1) alatti definíciójába a_n-nek (2) alakját helyettesítve

$$\begin{aligned}a_{n+1} =& \frac{1}{16}\left(1 + \frac{4}{3} + \frac{4}{2^n} + \frac{4}{3\cdot 2^{2n-2}} + \sqrt{1 + 8 + \frac{24}{2^n} + \frac{8}{2^{2n-1}}}\right) = \\ =& \frac{1}{16}\left(\frac{7}{3} + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{3\cdot 2^{2n-3}} + \sqrt{9 + \frac{3}{2^{n-3}} + \frac{1}{2^{2n-4}}}\right).\end{aligned}$$

A gyökjel alatti kifejezést tovább alakítva

$$9 + \frac{3}{2^{n-3}} + \frac{1}{2^{2n-4}} = 3^2 + 2\cdot 3\frac{1}{2^{n-2}} + \left(\frac{1}{2^{2n-2}}\right)^2 = \left(3 + \frac{1}{2^{n-2}}\right)^2,$$

kapjuk, hogy

$$a_{n+1} = \frac{1}{16}\left(\frac{7}{3} + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{3\cdot 2^{2n-3}} + 3 + \frac{1}{2^{n-2}}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3\cdot 2^{2n+1}},$$

amit bizonyítani akartunk.