a) Legyenek a kihúzott számok a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$ és $a+4d$. Mivel egy számtani sorozatot kezdőtagja és differenciája egyértelműen meghatározza, a fenti alakú számötösök egyértelműen megfeleltethetők az olyan pozitív egészekből álló $(a,\ d)$ pároknak, ahol $a+4d \le 90$. Feladatunk tehát így fogalmazható át: hány olyan pozitív egészekből álló $(a,\ d)$ számpár létezik, melyre $a+4d \le 90$?

Rögzítsük d értékét! $a+4d \le 90$ miatt a $a \le 90-4d$, tehát a lehetséges értékei $1, 2, 3, \ldots, 90-4d$. (Ha $d \ge 23$, akkor nincs megfelelő (a, d) pár.) Eszerint a feladat feltételeit kielégítő $(a,\ d)$ rendezett párok száma

$$\sum_{d=1}^{22}(90-4d) = \frac{22\cdot(90-4\cdot 1+90-4\cdot 22)}{2} = 968.$$

b) Ha a kihúzott számok mértani sorozatot alkotnak, jelöljük a legkisebbet a-val, és a sorozat hányadosát q-val. Ekkor a kihúzott számok a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, ahol $q>1$ és q racionális, hiszen előáll két egész szám (például aq és a) hányadosaként. Legyen

$$q=\frac{p}{r}$$

ahol p és r relatív prím pozitív egészek. r értéke szerint három esetet különböztetünk meg:

1. $r=1$, azaz q egész. Ekkor $a\cdot q^4 \le 90$ miatt $q^4 \le 90$, tehát $q<4$. $q=2$ esetén a lehetséges értékei 1, 2, 3, 4, 5, hiszen $a \ge 6$-ra $a\cdot q^4 \le 6\cdot 2^4 = 96$. Az öt szóba jövő számötös 1, 2, 4, 8, 16; 2, 4, 8, 16, 32; 3, 6, 12, 24, 48; 4, 8, 16, 32, 64 és 5, 10, 20, 40, 80, ezek valóban megoldások is. Ha $q=3$, akkor csak $a=1$ és az 1, 3, 9, 27, 81 számötös lehetséges, mert $a \ge 2$-re $a\cdot q^4 \ge 2\cdot 2^4 = 162$.

2. $r=2$. Ekkor, mivel p és r relatív prímek, és $aq^4 = a\dfrac{p^4}{2^4}$ egész, így a többszöröse 16-nak. Másfelől $p>r$ miatt $p \ge 3$, $aq^4 \ge 16\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^4 = 81$. Az $a=16$, $p=3$ esetben a 16, 24, 36, 54, 81 megoldást kapjuk, ha pedig $a>16$ vagy $p>3$, akkor

$$aq^4 \ge 32\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4 = 162, \text{ ill. } \quad aq^4 \ge 16\cdot\left(\frac{4}{2}\right)^4 = 256,$$

így nincs több megoldás.

3. $r \ge 3$. Ekkor, az előzőekhez hasonlóan $aq^4 = a\dfrac{p^4}{r^4}$ egész voltából $a \ge r^4$ következik. Másfelől $p>r$ miatt $p \ge r+1$, és így

$$aq^4 \ge r^4\cdot\left(\frac{r+1}{r}\right)^4 = (r+1)^4 \ge 4^4 = 256,$$

tehát ebben az esetben nincs a feladat feltételeit kielégítő számötös.

Így összesen 7 megoldást kaptunk.

Hetyei Gábor (Pécs, Leöwey K. Gimn., IV. o. t.)