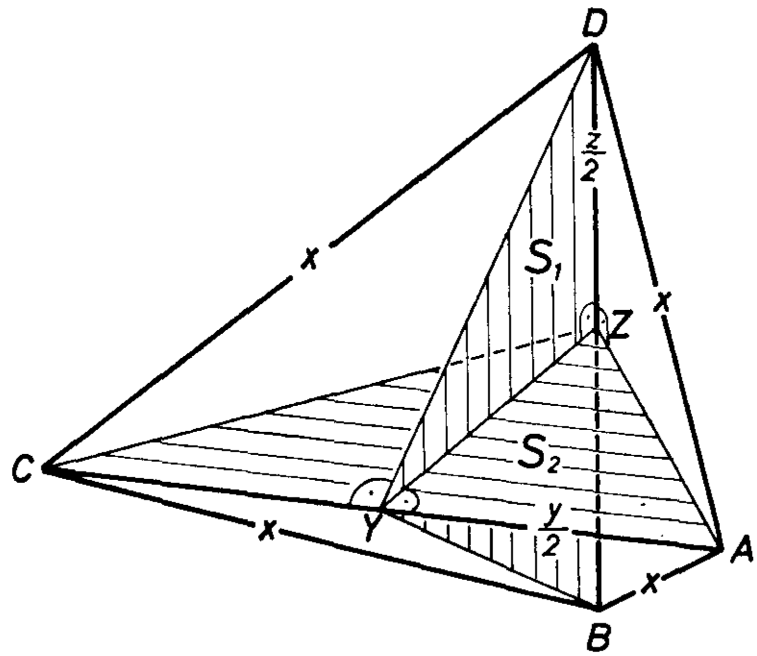
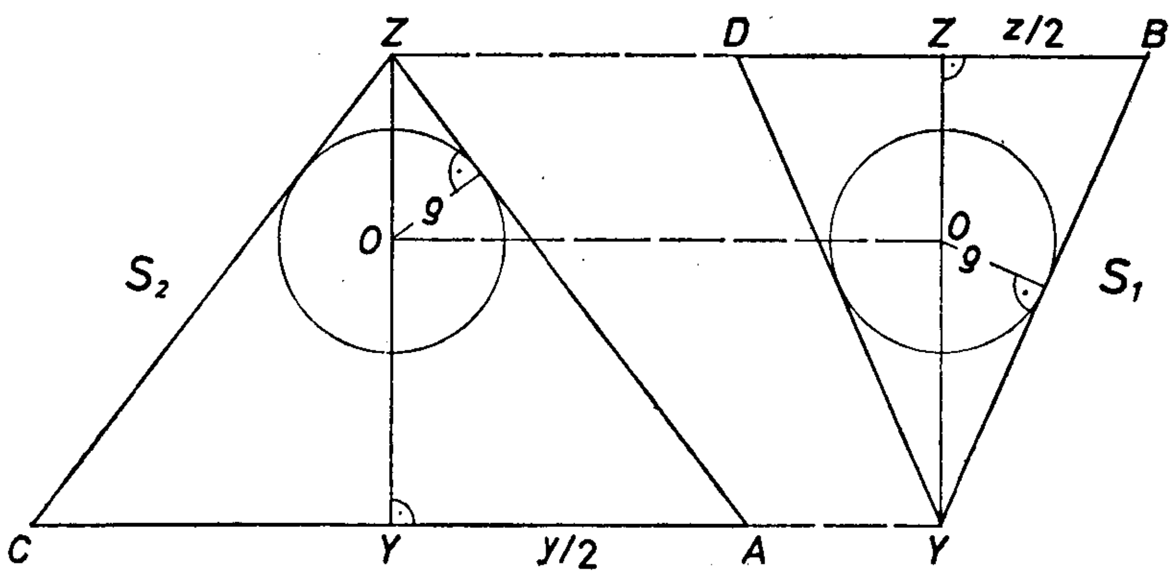
Jelölje Y az AC, Z a BD él felezőpontját.



1. ábra

A tetraéder szimmetrikus a $BDY = S_1$ síkra, hiszen az ABC egyenlő szárú háromszögben BY, az ADC egyenlő szárú háromszögben pedig DY merőlegesen felezi az AC alapot, tehát a BDY sík az AC élt merőlegesen felezi. Így az ACB és ACD lapsíkok merőlegesek S_1-re. Hasonlóan az $ACZ = S_2$ síkra is szimmetrikus a tetraéder, tehát a BDA, BDC lapsíkok merőlegesek S_2-re (1. ábra).

Mivel minden tetraéderbe egy és csak egy gömb írható, a beírt gömb O középpontjának mindkét szimmetriasíkra illeszkednie kell, ugyanis e síkokra való tükrözéssel a gömbnek ugyanúgy önmagába kell átmennie, mint a tetraédernek. A két szimmetriasík metszésvonala az YZ egyenes. Tekintve, hogy O csak a tetraéder belsejében lehet, ezért O rajta van az YZ szakaszon.



2. ábra

Legyen a beírt gömb sugara ϱ. Tekintsük az ACZ és BDY síkmetszeteket. A gömbből így kimetszett főkör érinti az ACZ egyenlő szárú háromszög ZA, ZC szárait, a másik metszetben YB-t és YD-t (2. ábra). A hasonló derékszögű háromszögek alapján

$$\varrho : \frac{y}{2} = OZ : AZ \qquad \text{és} \qquad \varrho : \frac{z}{2} = OY : BY.$$

Innen

$$\frac{OY}{OZ} = \frac{y \cdot BY}{z \cdot AZ}.$$

Másrészt $OY + OZ = YZ$, és így

$$(1) \qquad OY = \frac{y \cdot BY}{y \cdot BY + z \cdot AZ} \cdot YZ, \qquad OZ = \frac{z \cdot AZ}{y \cdot BY + z \cdot AZ} \cdot YZ.$$

Az itt szereplő szakaszokat Pitagorasz tétele szerint kiszámíthatjuk:

$$BY = \sqrt{x^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2}, \qquad AZ = \sqrt{x^2 - \left(\frac{z}{2}\right)^2},$$
$$YZ = \sqrt{BY^2 - \left(\frac{z}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{z}{2}\right)^2},$$

és ezzel a kívánt OY, OZ távolságokat kifejeztük az adott élhosszúságokkal.

A tetraéder lapjai létezésének szükséges feltételei $2x > y$ és $2x > z$, de ezek teljesülése még nem elegendő. A egyenlőtlenségnek az ACZ és a BDY metszetháromszögek oldalaira is fenn kell állnia, azaz $y < 2\sqrt{x^2 - \left(\frac{z}{2}\right)^2}$ és $z < 2\sqrt{x^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2}$ is szükséges. Mindkét utóbbi egyenlőtlenség szerint $4x^2 > y^2 + z^2$, ez magában foglalja az előbbi feltételeket is, teljesülése már elégséges feltétele az $ABCD$ tetraéder létezésének.

L. L.

Ilosvay Ferenc (Miskolc, Földes F. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Az (1) kifejezések közös nevezőjének első tagja az ACB lap területének 2-szerese, vagyis a speciális helyzet folytán az ACB és ACD lapok területének összege. A nevező második tagját hasonlóan értelmezve, a teljes nevező a tetraéder F felszínét jelenti.

Továbbmenve, kifejezhetjük a beírt gömb sugarát is az adatokkal:

$$\varrho = \frac{y \cdot OZ}{2AZ} = \frac{y}{2} \cdot YZ \cdot \frac{z}{6} \cdot 2 \cdot \frac{3}{F} = \frac{3V}{F}.$$

Felismertük a behelyettesítés után az ACZ metszet területét, majd az $ACZD$ tetraéder térfogatát, ami pedig fele az eredeti tetraéder V térfogatának. Végül egy ismert összefüggésre jutottunk.

B. T.