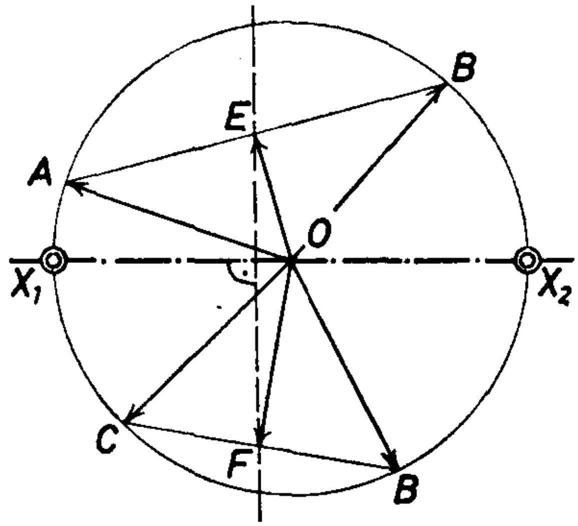
A kör középpontjából, O-ból az $A,\ B,\ C,\ D, X$ pontokba mutató vektorokat jelöljük rendre **a, b, e, d, x**-szel.



[1]

Ezek segítségével a feltétel

(1) $$(\mathbf{x}\text{-}\mathbf{a})^2 + (\mathbf{x}\text{-}\mathbf{b})^2 = (\mathbf{x}\text{-}\mathbf{c})^2 + (\mathbf{x}\text{-}\mathbf{d})^2.$$

Itt $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2 = \mathbf{d}^2$, mivel mindegyik vektor hossza a kör sugarával egyenlő. Ezt fel használva (1) a következő alakra hozható:

(2) $$(\mathbf{a}+\mathbf{b}\text{-}\mathbf{c}\text{-}\mathbf{d})\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Az AB és CD húrok felezőpontját rendre E-vel és F-fel jelölve $\overrightarrow{OE} = (\mathbf{a}\ +\mathbf{b})/2$, $\overrightarrow{OF} = (\mathbf{c}\ +\mathbf{d})/2$. Tehát (2) szerint ezek különbségének, a két felezőpontot összekötő $\overrightarrow{EF}$ vektornak és a középpontból a keresett X-be mutató $\overrightarrow{OX}$ vektornak a skaláris szorzata O. Ez kétféleképpen lehetséges.

1.eset. $\overrightarrow{EF} \neq \mathbf{0}$. Ekkor (2) szerint $\overrightarrow{EF}$ és $\overrightarrow{OX}$ merőlegesek. Ez a tény ad lehetőséget a szerkesztésre: a feltételnek megfelelő két X pontot az O-ból a felezőpontokat összekötő szakaszra bocsátott merőleges metszi ki.

2.eset. $\overrightarrow{EF} = \mathbf{0}$. Ekkor E és F egybeesik. Mivel a húr felezőpontjának helyzete a húrt egyértelműen meghatározza, ha az nem átmérő, ez csak úgy teljesülhet, ha AB és CD azonosak – amit eleve kizárhatunk –, vagy ha mindkettő átmérő. Az utóbbi esetben X a körvonal bármely pontja lehet.

Hetyei Gábor (Pécs, Leöwey K. Gimn., IV. o. t.)

[1] Az ábra jobb alsó sarkában B helyett helyesen D olvasandó.