

Adjunk a kérdéses számhoz $(15 - \sqrt{220})^{19} + (15 - \sqrt{220})^{82}$ -t. A binomiális tétel felhasználásával:

$$(15 + \sqrt{220})^{19} + (15 - \sqrt{220})^{19} = \sum_{t=0}^{19} \binom{19}{i} (\sqrt{220})^l \cdot 15^{19-l} + \\ + \sum_{t=0}^{19} (-1)^l \binom{19}{i} (\sqrt{220})^l \cdot 15^{19-l} = 2 \sum_{t=0}^{19} \binom{19}{2i} 220^i \cdot 15^{19-2i},$$

valamint

$$(15 + \sqrt{220})^{82} + (15 - \sqrt{220})^{82} = \sum_{t=0}^{82} \binom{82}{i} (\sqrt{220})^l \cdot 15^{82-i} + \\ + \sum_{t=0}^{82} (-1)^l \binom{82}{i} (\sqrt{220})^l \cdot 15^{82-l} = 2 \sum_{i=0}^{41} \binom{82}{2i} 220^i \cdot 15^{82-2i},$$

Mindkét kifejezés jobb oldalán a szumma jel mögött csupa 5-tel osztható egész szám áll, ezért kétszereseik összege, azaz

$$(15 + \sqrt{220})^{19} + (15 - \sqrt{220})^{19} + (15 + \sqrt{220})^{82} + (15 - \sqrt{220})^{82}$$

10-zel osztható egész szám.

Mivel $0 < 15 - \sqrt{220} = (225 - 220)/(15 + \sqrt{220}) < 5/25$, azért

$$0 < (15 - \sqrt{220})^{19} + (15 - \sqrt{220})^{82} < \left(\frac{1}{5}\right)^{19} + \left(\frac{1}{5}\right)^{82} < \frac{2}{5} < 1,$$

tehát a kérdéses (pozitív) kifejezés egy 0-ra végződő egész számnál egy 1-nél kisebb pozitív számmal kisebb, így a tizedesvessző előtti számjegye 9-es.

Megyesi Gábor (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., II. o. t.)