(1) $$a^2x^2+2abxy+(b^2+1)y^2<b^2+1$$

Megoldás. Tekintsük (1) két oldalának különbségét y függvényeként, azaz legyen

$$f(y)=(b^2+1)y^2+2abxy+a^2x^2-(b^2+1).$$

Az $f(y)$ grafikonja egy felfelé nyíló parabola, hiszen a másodfokú tag együtthatója, b^2+1, pozitív. Az (1) feltétel azt jelenti, hogy az $f(y)$ függvény negatív értéket is felvesz, így $f(y)$-nak két különböző zérushelye van. Ez pedig azt jelenti, hogy az $f(y)=0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa pozitív:

$$D=(2abx)^2-4(b^2+1)(a^2x^2+b^2-1)=4\big((b^2+1)^2-a^2x^2\big)>0.$$

Az $a>b^2\geqq 0$ feltétel miatt $a\neq 0$, és így a $D>0$ ekvivalens azzal, hogy

$$\left|\frac{b^2+1}{a}\right|>|x|.$$

Mivel a és b egész, azért $a>b^2$ egyúttal azt is adja, hogy $a\geqq b^2+1$. Így azt kapjuk, hogy $1>|x|$, ami alapján – mivel x is egész – csak $x=0$ lehetséges. Ha viszont $x=0$, akkor (1)-ből $(b^2+1)y^2<b^2+1$, ahonnan $y^2<1$, azaz $y=0$. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Megjegyzés. Sokan azért nem kapták meg a maximális pontszámot, mert azt állították, hogy (1) bal oldalát az $a>b^2$ feltétel miatt csökkentjük, ha a helyére b^2-et írunk. Ez azonban nem mindig igaz, például ha még $abxy<0$ is teljesül, akkor $abxy<b^3xy$.