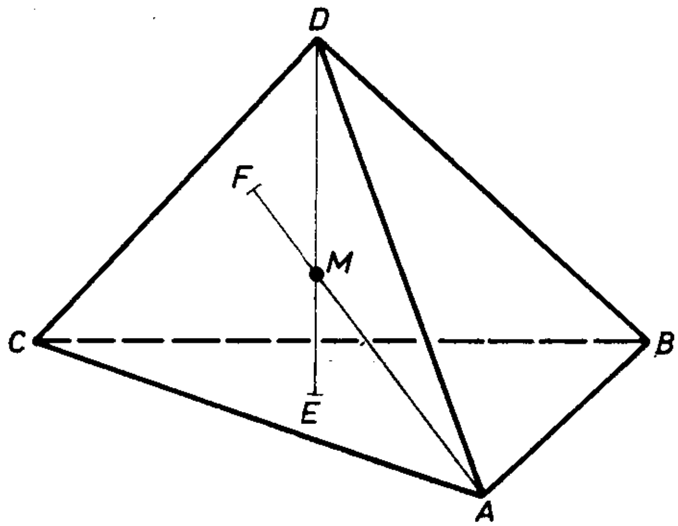
1. Jelöljük a D-ből és A-ból kiinduló magasság talppontját az ABC, ill. BCD lap síkján E-vel, ill. F-fel. Állítjuk: ha a DE és AF magasságok egy M pontban metszik egymást, akkor a kiinduló csúcsokat összekötő DA él merőleges a vele szemben fekvő BC élre.



Ennek az állításnak a bizonyításában ismételten felhasználjuk az egyenes és sík merőlegességének a tartalmát, ti. hogy ilyen kölcsönös helyzet mellett az egyenes merőleges a sík minden egyenesére. Eszerint $DE \perp BC$, mert BC benne van az ABC síkban és hasonlóan $AF \perp BC$. Így a DE, AF metsző egyenespár által meghatározott DAM sík merőlegesen áll a BC egyenesre, tehát a DAM-beli DA egyenes is merőleges BC-re, amint állítottuk.

Az itt említett DAM sík csak akkor nem volna egyértelműen meghatározva, ha M rajta volna az AD egyenesen – amit ekkor AM-mel is, DM-mel is jelölhetnénk. Ekkor azonban vagy E volna azonos A-val, és így (az AF magasság révén) M is azonos volna velük, vagy pedig F és M volna azonos D-vel. Az utóbbi változat azonban csak betűzésben különbözik az előbbitől. Mármost, az A és E pontok egybeesésével eleve azt tennénk fel, hogy DA merőleges az ABC síkra és benne a BC-re. Eszerint a kivételes esetben nem marad mit bizonyítani.

2. A feladat föltevése szerint a további BG és CH magasságok is metszik DE-t, ezért az előbbiekben AF szerepét BG-nek, majd CH-nak átadva, azt kapjuk, hogy a vizsgálandó tetraéderen egyszersmind $DB \perp AC$ és $DC \perp BA$ is teljesül, azaz mind a három közös csúcs nélküli élpár elemei merőlegesen állnak egymásra.

3. Jelöljük mármost M_1-gyel a térnek azt az egyértelműen meghatározott pontját, amelyre

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=\overrightarrow{OM}_1. \tag{1}$$

Ekkor feladatunk azt bizonyítani, hogy M_1 azonos az $ABCD$ tetraéder feltételezett magasságpontjával. Elég ehhez azt belátni, hogy $\overrightarrow{DM}_1$ merőleges az ABC síkra, vagyis hogy M_1 rajta van a DE magasságvonalon. Ugyanis (1)-ben D-vel egyenértékű szerepet tölt be A is, B is, C is, ezért akkor M_1 a további magasságvonalakon is rajta lesz, tehát azonos a tetraéder M magasságpontjával. Az (1) szerint

$$\overrightarrow{DM}_1=\overrightarrow{OM}_1-\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}),$$

erről külön-külön belátjuk, hogy merőleges a $\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{BA}$ vektorokra. Ekkor ugyanis $\overrightarrow{DM}_1$ merőleges az ABC síkra is.

Kiszámítjuk a $\overrightarrow{DM}_1\cdot\overrightarrow{BC}$ skaláris szorzat 2-szeresét:

$$2\overrightarrow{DM}_1\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD})(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OC}^2-\overrightarrow{OB}^2)+$$
$$+(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD})(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=OC^2-OB^2+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}.$$

Az eredmény 0, mert $OC=OB$, a körülírt gömb sugarai, másrészt a $\overrightarrow{DA}$ és $\overrightarrow{BC}$ vektorok előre bizonyított merőlegessége folytán skaláris szorzatuk 0.

Számításunkban C szerepét A-val fölcserélve $\overrightarrow{DM}_1\perp\overrightarrow{BA}$ adódik. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzések. 1. Az állítás bal oldalán álló vektornak kivétel nélkül minden tetraéderben van értelme. Érdemes tehát megvizsgálni, mi az $\overrightarrow{OM}$ vektor M végpontjának a jelentése bármely tetraéderre nézve. A válasz: M az O középpont tükörképe az S súlypontra nézve, hiszen

$$\overrightarrow{OS}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{OM}.$$

2. Nem hiábavaló időnként megemlíteni, hogy S-ként itt is elsősorban annak a tömegpontrendszernek a súlypontjára gondolunk, amikor az A, B, C, D csúcsokba egyenlő pontszerű tömegeket helyezünk el. Ugyanez érvényes a háromszög, vagyis a „háromcsúcs" súlypontjára is.

Meg lehet azonban mutatni, hogy homogén anyaggal kitöltve a tetraédert, a háromszöget, e fizikai testnek – lapnak – ugyancsak S-ben van a súlypontja.

3. Sokan felhasználták, hogy az ilyen ún. *ortocentrikus tetraéder* esetén a tetraédernek létezik a háromszöghöz hasonlóan *Euler-egyenese*, azaz O, M és a tetraéder S súlypontja egy egyenesbe esik, továbbá S felezi az OM szakaszt. Az ilyen megoldások azonban csak akkor kaptak pontot, ha feltüntették, hogy hol találták meg a tételt.