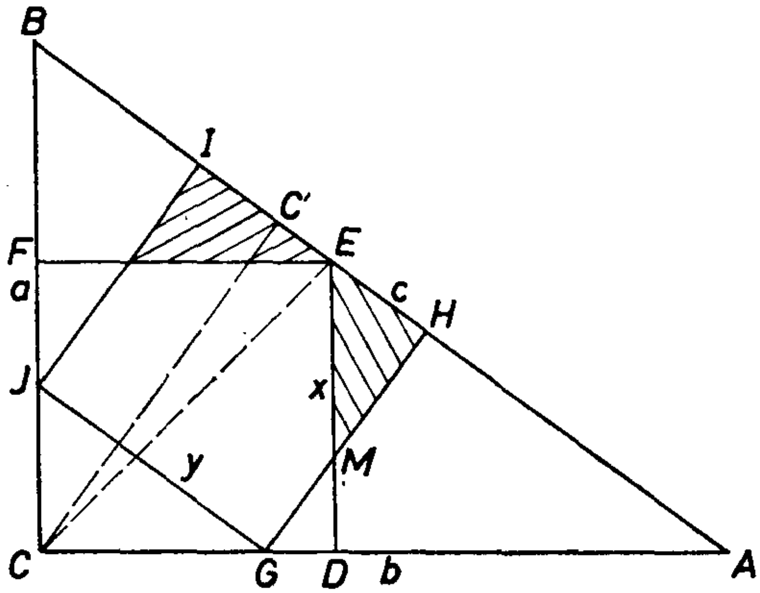
Legyen az adott háromszög ABC, amelyben AB az átfogó, oldalai szokásosan a, b, c. Minden beírt négyzetből két csúcsnak rajta kell lennie a háromszög valamelyik oldalán. Ha ezeket a CA befogón keressük, akkor az egyik C lesz, különben nem lenne négyzetcsúcs a CB-n, pedig AB-n ekkor csak egy csúcs lehet. Jelöljük ezt a beírt négyzetet $CDEF$-fel, D van a CA-n, ennélfogva F a CB-n.



A négyzet ilyen beírásában a CE átló felezi az ACB derékszöget, ezért

$$BE : EA = CB : CA = a : b$$

és

$$BE : (BE + EA) = BE : c = a : (a + b),$$

innen $BE = \dfrac{ac}{a+b}$.
Így a BEF és BAC háromszögek hasonlóságából a négyzet oldala

$$FE = \frac{b}{c}\,BE = \frac{ab}{a+b}$$

Ha az AB átfogón kívánunk két négyzetcsúcsot – legyenek ezek H és I –, ezeket a CC' magasság szétválasztja, hiszen a HI-vel párhuzamos GJ négyzetoldal végpontjai nem lehetnek ugyanazon a befogón. Legyenek H és G a CC'-nek A-t tartalmazó oldalán, és legyen $IJ = IH = y$.

A három részre darabolt átfogó szélső darabjai, hasonló háromszögek felhasználásával

$$BI = \frac{a}{b}\,y, \qquad AH = \frac{b}{a}\,y,$$

és hozzájuk véve IH-t, a háromszög AB átfogóját kapjuk, amiből

$$y = \frac{c}{\dfrac{a}{b} + 1 + \dfrac{b}{a}} = \frac{abc}{a^2 + ab + b^2}.$$

A G csúcs az a/b aránynak minden értéke mellett a CD szakaszon van, mert

$$CG = \frac{b}{c}\,JG = \frac{ab^2}{a^2 + ab + b^2} = CD \cdot \frac{ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} < CD,$$

hasonlóan J a CF szakasz pontja. Másrészt I mindig a BE szakaszon és H az AE-n van, mert

$$\frac{BI}{BE} = \frac{a(a+b)}{a^2 + ab + b^2} < 1 \qquad \text{és} \qquad \frac{AH}{AE} = \frac{b(a+b)}{a^2 + ab + b^2} < 1.$$

Ezek szerint a két négyzet közös része az $ELJGM$ ötszög, ahol L az EF, IJ szakaszpár, M pedig az ED, HG pár közös pontja: második négyzetünkből el kell hagynunk az EIL és az EHM háromszöget.

Ezek befogói az előbbi részeredmények felhasználásával

$$EI = BE - BI = \frac{ab^2c}{(a+b)(a^2+ab+b^2)} = \frac{b}{a+b}\cdot y,$$
$$IL = \frac{a}{b}\,EI = \frac{a}{a+b}\cdot y,$$

továbbá hasonló számítás eredményeként $HE = IL$ és $HM = IE$.

Ezek alapján a keresett terület

$$y^2 - EI\cdot IL = y^2\left(1 - \frac{ab}{(a+b)^2}\right) = \frac{a^2+ab+b^2}{(a+b)^2}\cdot y^2 = \frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{(a+b)^2(a^2+ab+b^2)}.$$

Megjegyzés. Ha a befogók helyett az átfogót és az egyik hegyesszöget tekintjük adottnak, akkor a két négyzet közös részének területe

$$\frac{c^2}{2}\cdot\frac{\sin^2 2\alpha}{(1+\sin 2\alpha)(2+\sin 2\alpha)} \leqq \frac{c^2}{12}.$$

A felső korlátot $\alpha = 45^\circ$ mellett éri el a terület, és ekkor $1/3$ része az eredeti háromszög területének.