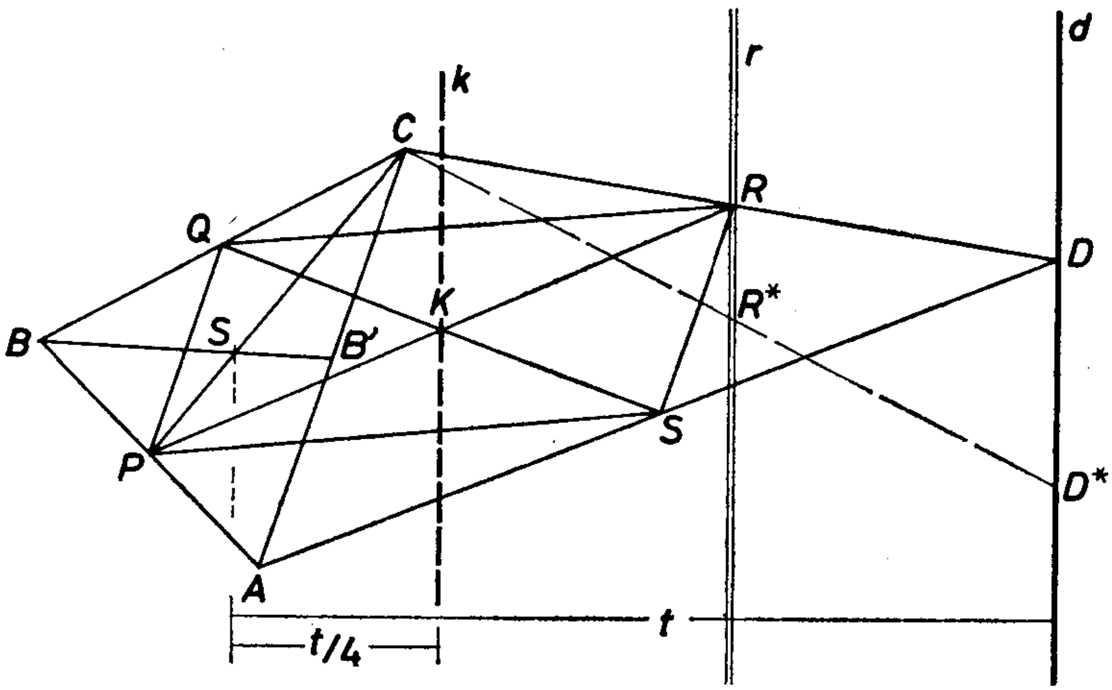
I. megoldás. Jelöljük az AB, BC, CD, DA oldal felezőpontját rendre P, Q, R, S-sel.



1. ábra

Az ACD és SRD hasonló háromszögek, a hasonlóság aránya 2:1. Tehát $SR \| AC$ és $SR = AC/2$. Ugyanígy látható, hogy $PQ \| AC$ és $PQ = AC/2$, az ABC és PBQ háromszögek hasonlóságából. Ebből következik, hogy SR és PQ párhuzamosak, egyállásúak és egyenlők, vagyis a $PQRS$ négyszög csakugyan paralelogramma.

Keressük először az R pont mértani helyét, miközben D befutja a d egyenest! R a DC szakasz felezőpontja, C rögzített pont, ezért úgy is tekinthetjük, hogy R-et a D pontnak C-ből való, 1/2 arányú kicsinyítésével kapjuk. Tehát ha D befutja a d egyenest, akkor R mindig rajta van azon az r egyenesen, amelyet a d egyenes C-ből való, 1/2 arányú kicsinyítésével kapunk. R eljut az r-nek bármely R^* pontjába; az R^*-ot előállító D^* pontot a CR^* egyenes metszi ki d-ből. A metszés létrejön, mert r benne van a C és d által meghatározott síkban.

Továbblépve, K – a paralelogramma középpontja – felezőpontja a PR átlónak. A P pont rögzített (hiszen a rögzített AB oldal felezőpontja), R pedig az r egyenesen fut végig, így az előző gondolatmenethez hasonlóan látható, hogy a K pont azon a k egyenesen fut végig, amelyet r-nek a P-ből 1/2 arányú kicsinyítésével kapunk. – A „végigfut" kifejezésbe most már beleértettük annak a visszafordító meggondolásnak a megismétlését is, amelyet előbb az R^*-gal végeztünk.

II. megoldás. Legyen S az ABC háromszög súlypontja, és vezessük be az $\overrightarrow{SA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{SB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{SC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{SD} = \mathbf{d}$ jelöléseket. Az előző megoldás jelöléseit megtartva ekkor

$$\overrightarrow{SP} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}, \qquad \overrightarrow{SR} = \frac{\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2},$$

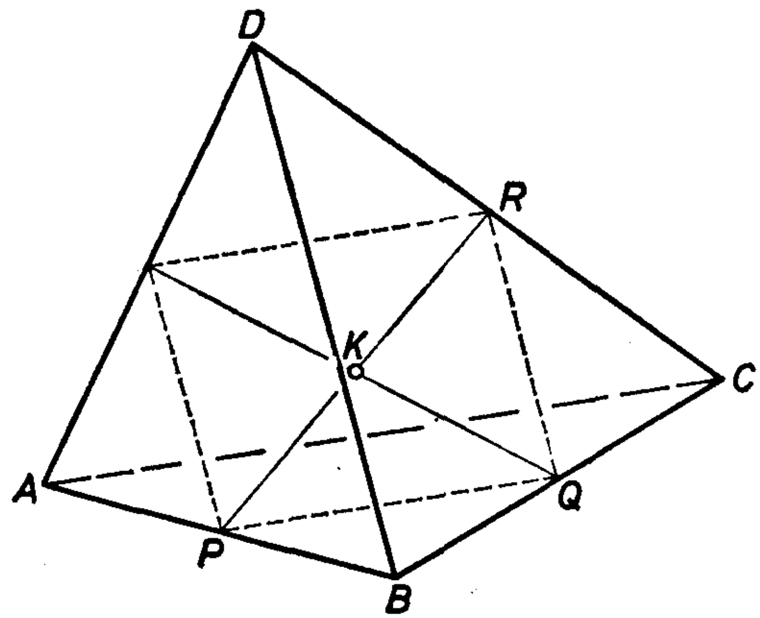
és ebből

$$\overrightarrow{SK} = \frac{\overrightarrow{SP}+\overrightarrow{SR}}{2} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{4}.$$

Mivel S az ABC háromszög súlypontja, azért $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{0}$, vagyis $\overrightarrow{SK} = \mathbf{d}/4 = \overrightarrow{SD}/4$. Vagyis a K pontok mértani helye az az egyenes, amit a d egyenes S-ből való, 1/4-szeres kicsinyítésével kapunk.

Hetyei Gábor (Pécs, Leöwey K. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az $\overrightarrow{SK}$-ra kapott kifejezésből látszik, hogy K a mindenkori $ABCD$ (esetleg elfajuló) tetraéder súlypontja (2. ábra).



2. ábra

2. Az is kiolvasható a II. és az I. megoldás egybevetéséből, hogyan lehet egyetlen lépésben elvégezni a d egyenes kétszeri, 1/2 arányú kicsinyítését előbb a C, majd az eredményt a P centrumból; vagy ahogyan mondani szokás: összeszorozni ezt a két transzformációt.

A szorzatban a kicsinyítés arányszáma $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$, az eredő S centrum pedig a C első centrumnak a P második centrumból vett $\mathbf{\frac{1}{3}}$ arányú kicsinyített képe.

3. Ajánljuk az érdeklődőknek, gondoljanak utána ezeknek, egyrészt tetszőleges λ_1, λ_2 hasonlósági arányszámok mellett, másrészt az A és C, valamint R és S szerepek fölcserélése mellett is.

4. Nem végeztünk diszkussziót a megindulási A, B, C, d adatok kölcsönös helyzetére vonatkozóan. Megjegyezzük csupán, hogy d lehetne az A, B, C pontok által meghatározott síkban is. Az viszont már jórészt meddő tevékenység lett volna, hogy d-nek valamelyik adott pontra való illeszkedését is vizsgáljuk.