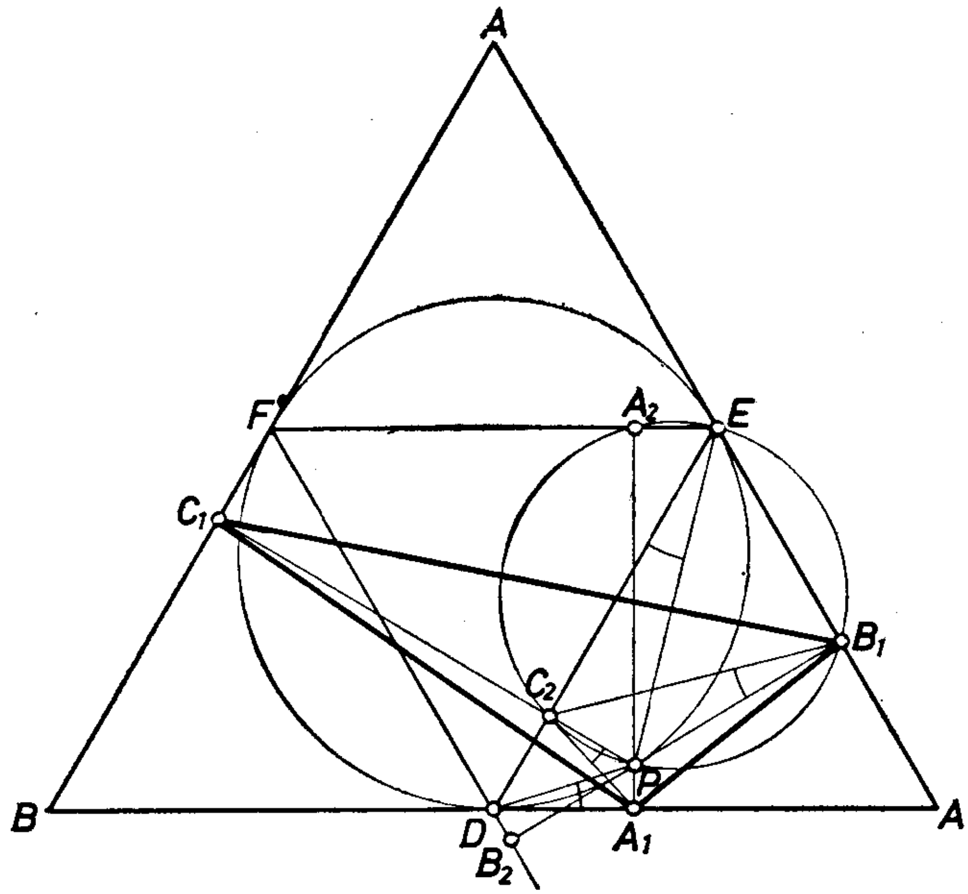
I. megoldás. Legyen az ABC szabályos háromszög BC, CA, AB oldalának felezőpontja, más szóval a beírt kör érintési pontja rendre D, E, F. Legyen P egyelőre ezektől különböző pontja a beírt körnek, és P-nek szóban forgó vetületei rendre A_1, B_1, C_1, végül a DEF középháromszög EF, FD és DE oldalegyenesén levő vetülete rendre A_2, B_2, C_2.



A merőleges szárú szögek tétele szerint a PA_1, PB_1, PC_1 félegyenesek páronként $120°$-os szöget zárnak be egymással. Ezért P mindig benne van a kérdéses $A_1B_1C_1$ háromszögben, tehát ennek területét a PA_1B_1, PB_1C_1, PC_1A_1 háromszögek területének összegeként kapjuk. Közös tényezőjüket kiemelve

$$t = \frac{\sin 120°}{2}\,(PA_1 \cdot PB_1 + PB_1 \cdot PC_1 + PC_1 \cdot PA_1).$$

Elég tehát megmutatnunk, hogy a zárójelbeli K kifejezés állandó.

Belátjuk, hogy $PA_1 \cdot PB_1 = PC_2^2$. A vetítések folytán A_1 és C_2 rajta vannak a PD szakasz fölötti Thalész-körön, B_1 és C_2 pedig a PE szakasz fölötti Thalész-körön. A kerületi szögek tétele alapján ábránk szerint

$$PB_1C_2\sphericalangle = PEC_2\sphericalangle = PED\sphericalangle = PDA_1\sphericalangle = PC_2A_1\sphericalangle.$$

Felhasználtuk, hogy felvételünkben C_2 a DE szakasz belső pontja, másrészt hogy a PED és PDA_1 szögek a beírt körre nézve is kerületi szögek.

Így a PB_1C_2 és PC_2A_1 háromszögek $2-2$ szöge egyenlő, tehát hasonlók és csúcsaik a felírás sorrendjében felelnek meg egymásnak. Ebből

$$PB_1 : PC_2 = PC_2 : PA_1,$$
$$PA_1 \cdot PB_1 = PC_2^2,$$

amint állítottuk.

Tovább alakítjuk az összefüggést. Ábránkat és a szabályos háromszög összefüggéseit felhasználva

$$PA_1 \cdot PB_1 = (PC_1 - C_2C_1)^2 = \left(PC_1 - \frac{CF}{2}\right)^2 = \left(PC_1 - \frac{\sqrt{3}}{4}AB\right)^2 =$$
$$= PC_1^2 - \sqrt{3}\,\frac{AB \cdot PC_1}{2} + \frac{3}{16}AB^2.$$

Lényegében ugyanígy kapjuk az alábbiakat:

$$PB_1 \cdot PC_1 = PA_1^2 - \sqrt{3}\,\frac{BC \cdot PA_1}{2} + \frac{3}{16}AB^2,$$
$$PC_1 \cdot PA_1 = PB_1^2 - \sqrt{3}\,\frac{CA \cdot PB_1}{2} + \frac{3}{16}AB^2.$$

(A gondolatmenetben átmenetileg két kis módosulás van, de azok a végeredményt nem érintik: B_2 a DF oldal meghosszabbításán keletkezik, továbbá P belső pontja az A_1A_2, B_1B_2 szakaszoknak.)

Ezek összeadásával

$$K = (PA_1^2 + PB_1^2 + PC_1^2) - \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}(AB \cdot PC_1 + BC \cdot PA_1 + CA \cdot PB_1) + \frac{9}{16}AB^2.$$

Felismerjük a második tagban az ABC háromszög területét mint a PAB, PBC, PCA részháromszögek területének összegét, $\sqrt{3}$-mal szorozva. Ez a részlet tehát $-\frac{3}{4}AB^2$. Az innen adódó

$$PA_1 + PB_1 + PC_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$$

kifejezést – ami egyébként a szabályos háromszög *minden belső* pontjára érvényes –, a távolságok négyzetösszegének átalakítására is felhasználjuk, és ezáltal egyenletet kapunk a K kifejezésre. K definíciója alapján

$$PA_1^2 + PB_1^2 + PC_1^2 = (PA_1 + PB_1 + PC_1)^2 - 2K,$$
$$K = -2K + \frac{9}{16}AB^2,$$

és máris látjuk, hogy K állandó. Ezzel bebizonyítottuk az állítás.

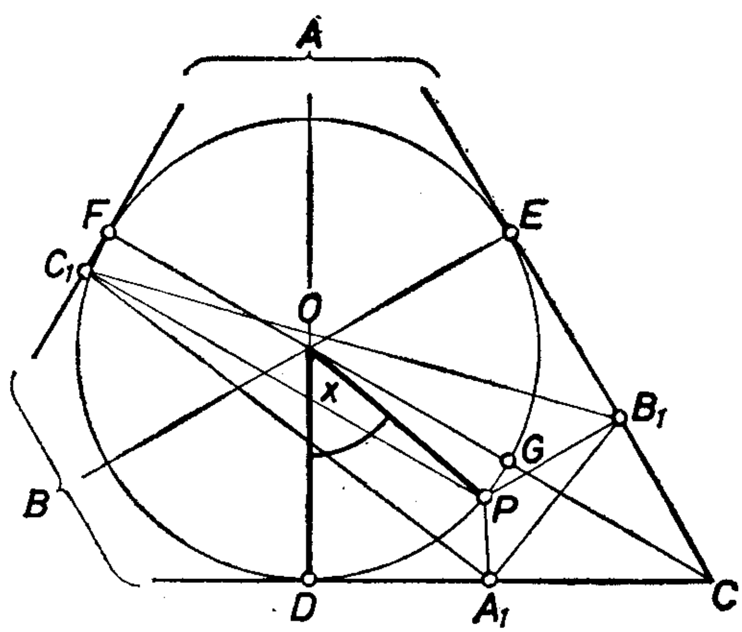
Felírjuk az $A_1B_1C_1$ háromszög területének explicit kifejezését is, az ABC háromszög T területével:

$$t = \frac{\sqrt{3}}{4}K = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{16}AB^2 = \frac{3}{16}T.$$

Ez az eredmény közvetlenül is adódik a speciális esetekben, ti. ha P-t D-ben vagy a CF szimmetriatengelyen választjuk. Az $A_1B_1C_1$ egyenlő szárú háromszög alapja és magassága az első esetben $\frac{3}{4}AB$, ill. $\frac{1}{4}AD$, a másodikban $\frac{1}{4}AB$, ill. $\frac{3}{4}CF$.

Danyi Pál (Pécs, Nagy Lajos Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Tovább használjuk az I. megoldás jelöléseit, legyen továbbá a beírt kör középpontja O, a körnek az OC félegyenesen levő pontja G.



A szimmetria alapján elég az állítást a kör rövidebbik DG ívére bizonyítani. Legyen P ennek pontja, továbbá $OD = \varrho = 1$ és $DOP\sphericalangle = x$. Ekkor

$$\begin{aligned} PA_1 &= 1 - \cos x, \\ PB_1 &= 1 - \cos(x - 120^\circ), \\ PC_1 &= 1 - \cos(x - 240^\circ), \end{aligned}$$

ezekkel az I. megoldás K kifejezése így alakul:

$$\begin{aligned} &3 - 2\big(\cos x + \cos(x - 120^\circ) + \cos(x - 240^\circ)\big) + \\ &\quad + \cos x\big(\cos(x - 120^\circ) + \cos(x - 240^\circ)\big) + \\ &\quad + \cos(x - 120^\circ)\cos(x - 240^\circ). \end{aligned}$$

A 2-vel szorzott zárójel értéke az addíciós tétel alkalmazásával 0. A következő zárójelben $-\cos x$ áll, az utolsó szorzat pedig a $2\cos u \cos v = \cos(u - v) + \cos(u + v)$ azonosság alkalmazásával

$$\frac{1}{2}(\cos 120^\circ + \cos 2x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + 2\cos^2 x - 1\right) = -\frac{3}{4} + \cos^2 x.$$

Ezek szerint a K kifejezés x-et tartalmazó tagjainak összege 0, a terület nem függ x-től. Az állítást bebizonyítottuk.

Az $A_1B_1C_1$ háromszög területe számításunk szerint $\dfrac{\sin 120^\circ}{2} \cdot \dfrac{9}{4} = \dfrac{9\sqrt{3}}{16}$ ($\approx$ 0,974 egység). Másrészt az ABC háromszög magassága 3, oldala $2\sqrt{3}$, területe $3\sqrt{3}$, a két terület aránya $\dfrac{3}{16}$.

Megyesi Gábor (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. A feladat kapcsolatban áll az 1977. évi OKTV. II. fordulójának két feladatával is, amelyek az I., ill. II. szakosítású matematikai osztályok versenyzői részére voltak kitűzve. (Lásd a Középiskolai Matematikai Versenyek 1977 - 1979. c. gyűjtemény, Tankönyvkiadó, Bp., 1981. 106., ill. 109. feladatát és a hozzá kapcsolódó megjegyzéseket.)