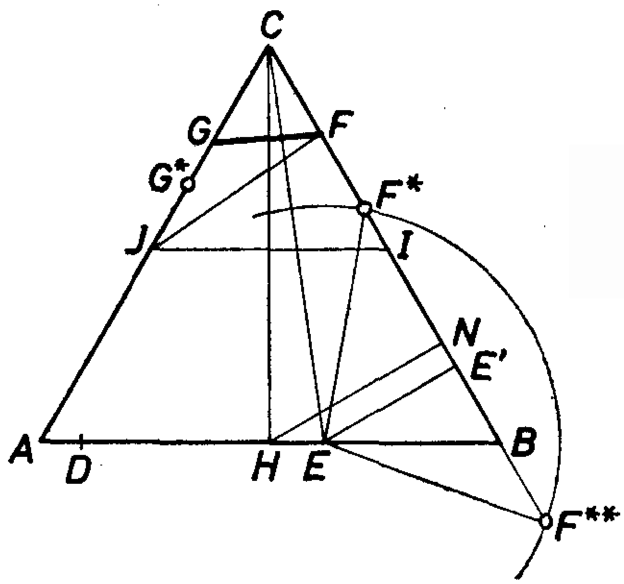
Megoldás. A beírás sokféle lehetősége folytán az állítás bizonyítására csak az az út látszik végigvihetőnek, hogy nem sikerül azt megcáfolni. Próbáljuk tehát bebiztosítani, hogy az egymás utáni oldalak nagyobbak legyenek a szabályos háromszög oldalának felénél és ez az utolsóra nem fog sikerülni.

Legyenek a háromszög csúcsai A, B, C, a beírt négyszögéi – ugyanabban a forgási irányban körüljárva – D, E, F, G és legyen D az AB alapon. A négyszögnek legalább egy szomszédos csúcspárja egy háromszögoldalra esik, legyen E is AB-n. Jelöljük az AB, BC, CA oldal felezőpontját rendre H, I, J-vel.



1. ábra

Mivel így $AH = HB = \frac{1}{2}$, és ez éppen a négyszög oldalának el nem érhető alsó korlátja, azért D és E a H-nak két oldalán lehet csak, D az AH-n – kizárva H-t, de megengedve A-t, másrészt E a HB-n, de nem a H-ban.

Írjunk $\frac{1}{2}$ sugarú kört E-nek egy tetszőleges megengedett helyzete körül – de most B-t is kizárjuk – és jelöljük a BC egyenesen kimetszett pontjait F^* és F^{**}-gal úgy, hogy $CF^* < CF^{**}$. Ezek létrejönnek, mert E-nek és H-nak BC-n levő vetületét E'-vel, N-nel jelölve $EE' < HN < HB = \frac{1}{2}$. Ekkor F^* a CB szakaszon van, hiszen $EC > HC > \frac{1}{2}$. Az F^*EB háromszögben $\frac{1}{2} = F^*E > EB$, ennélfogva $F^*BE\sphericalangle = 60^\circ > EF^*B\sphericalangle$, folytatólag $F^*EB\sphericalangle > 60^\circ$, így $F^*B > F^*E = \frac{1}{2}$. Így F^* az IC szakasz belsejében van és $F^*C < \frac{1}{2}$.

Másrészt F^{**} az F^*-nak E'-re való tükörképe, és E' a BN szakasz belsejében van, N pedig a BI felezőpontja, BC-nek első negyedelő pontja. Ezek szerint

$$F^{**}E' = F^*E' > F^*N > IN = BN > BE',$$

vagyis F^{**} a BC oldal B-n túli meghosszabbításán van.

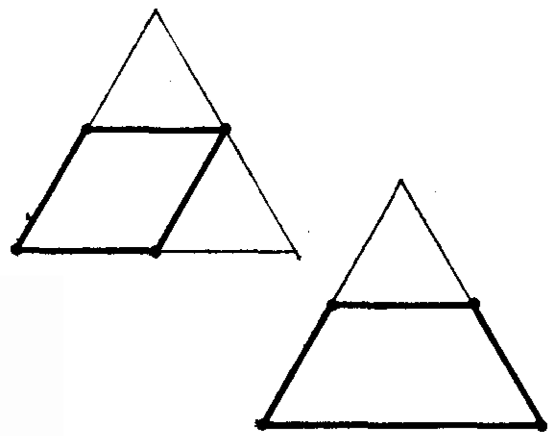
Végül is a BF^* szakasz minden belső pontja közelebb van E-hez, mint $F^*E = \frac{1}{2}$. Ezért F vagy csak a CF^* szakaszon lehet, F^*-ot kizárva – ami mindjárt azt is jelenti, hogy a BC oldalon nem lehet két csúcsa a beírt négyszögnek, vagy pedig nem is a BC-n van, hanem AC-n.

Számolgatás nélkül kapjuk ugyanezeket F helyzetére, ha E-t azonosnak vesszük B-vel. Ámde a meggondolást megismételve a CH tengelyre tükrös elemekkel, azt kapjuk, hogy az AC oldalon sem lehet két csúcsa a négyszögnek emiatt F csak CF^*-on lehet, továbbá a G csúcs csak a CG^* szakasz belsejében lehet, ahol $G^*D = \frac{1}{2}$ és G^* a JC szakasz belsejében van.

Így pedig a négyszög negyedik oldalára $FG < FJ < IJ = \frac{1}{2}$.

Minden lehetőséget figyelembe vettünk, és nem sikerült a negyedik oldalra biztosítani, hogy nagyobb legyen $\frac{1}{2}$-nél, ezzel az állítás bizonyossággá vált.

Megjegyzés. Ha megengedünk $\frac{1}{2}$ hosszúságú oldalakat is, akkor a 2. ábrán látható beírt négyszögek megfelelnek.



2. ábra