Két esetet különböztetünk meg: a) n páratlan, b) n páros.

a) Írjuk fel n-et $n = 2k+1$ alakban! Ekkor

$$5^n - 1 = 5^{2k+1} - 1 = 5 \cdot 25^k - 1 = 5(25^k - 1) + 4.$$

Az $a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + b^{k-1})$ azonosság alapján $25^k - 1$ osztható 24-gyel, és így 8-cal is, tehát $5^n - 1$ néggyel osztható, de 8-cal már nem. Ezért $n \geqq 3$ esetén nem lehetséges, hogy $2^n \mid (5^n - 1)$.Az egyedül fennmaradó lehetőség $n = 1$, ez valóban megoldás is.

b) Írjuk fel n-et $n = 2^k m$ alakban, ahol m páratlan egész. Az $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ azonosság ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy

$$5^{2^k m} - 1 = (5^{2^{k-1}m} + 1)(5^{2^{k-1}m} - 1) = (5^{2^{k-1}m} + 1)(5^{2^{k-2}m} + 1)(5^{2^{k-2}m} - 1) = \ldots =$$
$$= (5^{2^{k-1}m} + 1)(5^{2^{k-2}m} + 1) \cdot \ldots \cdot (5^{4m} + 1)(5^{2m} + 1)(5^m + 1)(5^m - 1).$$

Tetszőleges pozitív egész i-re $5^i + 1$ páros, de 4-gyel nem osztható, hiszen $i = 1$-re $5^i + 1 = 6$, $i = 2$-re pedig $(5^i + 1)$ 26-tal egyenlő. Eszerint szorzatunk első k tényezője páros, de 4-gyel nem osztható szám. Az a) eset vizsgálatánál láttuk, hogy $5^m - 1$ néggyel osztható, de 8-cal már nem, így $2^{k+2} \mid (5^n - 1)$, de $2^{k+3} \nmid (5^n - 1)$. Tehát $2^n \mid (5^n - 1)$ akkor és csak akkor teljesül, ha

$$2^k m \leqq k + 2. \tag{1}$$

$k \geqq 3$ esetén $2^k > k + 2$, így csak a $k = 1$ és $k = 2$ esetek jöhetnek szóba. Ha $k = 1$, akkor (1)-ből $2m \leqq 3$, azaz $m = 1$, és ekkor $n = 2$. Ha pedig $k = 2$, akkor (1)-ből $4m \leqq 4$, és így $m = 1$, $n = 4$. Könnyen ellenőrizhető, hogy ezek valóban megoldások.

Összefoglalva: $2^n \mid (5^n - 1)$ csak $n = 1, 2, 4$ esetén teljesül.