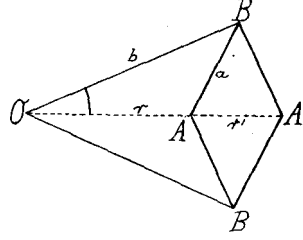


II. Az inverzor.

A pantograf működését röviden úgy jellemezhetjük, hogy az adott $OA = r$ távolsághoz megadja annak λ -szorosát; az inverzor (invertere=megfordítani) ezzel szemben adott távolsághoz a vele reciprok $\frac{1}{r}$ -t vagy általánosabban $\frac{\lambda}{r}$ -t nyújtja. Itt is a szerkezet alapja a csuklóban mozgó paralelogramm – és pedig jelen esetben rhombus – melynek két szembenfekvő csúcsát két másik egyenlő szintén csuklóval összekötött rúd köti össze (1. ábra).



Ha O -t szilárdan tartom, úgy A -val együtt A' is mozog, mégpedig ellenkező értelemben: ha A közeledik O -hoz, A' távolodik tőle és fordítva. Hogy $OA = r$ és $OA' = r'$ között az összefüggést megállapíthassuk, fejezzük ki $\cos AOB$ értékét az OAB és OAB' háromszögekből. Ha jelölésünk $AB = a$, $OB = b$, úgy

$$\cos AOB = \frac{r^2 + b^2 - a^2}{2br} = \frac{r'^2 + b^2 - a^2}{2br'},$$

miből felszorozás útján

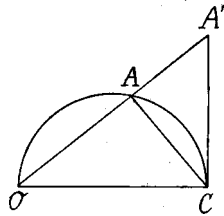
$$rr'(r - r') + b^2(r' - r) - a^2(r' - r) = (r - r')(rr' - b^2 + a^2) = 0.$$

Ha tehát a számunkra lényegtelen $r - r'$ faktortól eltekintünk, mely csak egy elfajuló esetet jellemez, úgy az egyenletből

$$rr' = b^2 - a^2 \quad r' = \frac{b^2 - a^2}{r},$$

a -t és b -t úgy választhatjuk, hogy $b^2 - a^2 = 1$ (pl. $b = 1,25$, $a = 0,75$), ekkor az átalakító képlet $r' = \frac{1}{r}$; az általános esetben $r' = \frac{\lambda}{r}$, hol $\lambda = b^2 - a^2$. Az idom szimmetriájából következik, hogy O , A , A' ugyanazon az egyenesen fekszenek, s így az A -nak O -ra vonatkozó poláris koordinátáiból (r, φ) A' -éi ily alakban adódnak $\left(\frac{\lambda}{r}, \varphi\right)$.

A műszer kivitelénél épp úgy, mint a pantografnál, O -ban szeg van, mely az egészet a rajzlaphoz rögzíti, A -ban vezető szeg, A' -ban ceruza van. Ha A tetszésszerű idomot ír le, úgy A' egy másféle, hozzá nem hasonló idomot fog leírni, az „inverz” idomot. Minthogy az $rr' = \lambda$ összefüggés kölcsönös A és A' -ben a vezető szeg és a ceruza által leírt idomok ugyanazok, ha a kettő helyét a műszerben felcserélem. Ha A' egyenest ír le, úgy A kört, mely az O ponton megy keresztül.



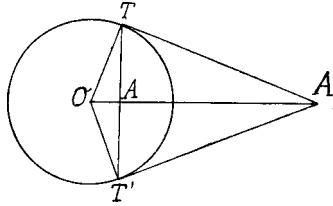
Ugyanis, ha az 2. ábrában $\cos AOC$ -t az $AOC \sim COA'$ háromszögekből kifejezzük:

$$\cos AOC = \frac{OA}{OC} = \frac{OC}{OA'}, \quad \text{tehát} \quad OA \cdot OA' = \overline{OC}^2,$$

vagyis ugyanaz az összefüggés, mint r és r' között volt, ha $\overline{OC}^2$.

Világos, hogy A -t az OAC körön mozgatva, A' a CA' egyenes írja le. Ez a tulajdonsága adja meg gyakorlati fontosságát e műszernek, amennyiben segélyével az „egyenestvezetés”, vagyis körmozgásnak egyenes mozgássá való átalakítása elérhető anélkül, hogy súrlódó tagokat kellene közbeiktatni. Ecélből szerkesztette Peaucellier 1864-ben. Rendesen ugyan más mechanizmust, a Watt-féle paralelogrammot, szokás alkalmazni e célra, mert kevesebb tagból áll, de viszont a Watt csak közelítőleg ad egyenes vonalú mozgást, míg Peaucellier teljesen szigorúan egyenesben vezet. Azt, hogy A az O ponton átmenő körön mozogjon, úgy szokás elérni, hogy A a szilárd P ponttal van még összekötve és így körülötte $PA = PO$ sugarú kört írhat le.

Az A és A' pontok kölcsönös megfelelése, az inverzió, a mértanban is rendkívül fontos. Ott az $OA \cdot OA' = \lambda$ összefüggést egyszerűbben olyképp értelmezik, hogy adott sugarú és O középpontú körhöz A' -ből meghúzva az $A'T$ és $A'T'$ érintőket, A mint a TT' és OA' egyenesek metszése adódik ki.



Fordítva a kör belsejében levő A ponthoz a hozzá inverz A' olyképp adódik, hogy az OA átmérőre az A -ban reá merőleges TT' húrt meghúzzuk, A' az OA meghosszabbításának és az OT -re merőleges TA' egyenesnek metszőpontja. Az idomból rögtön látni, hogy O, A, A' ugyanazon egyenes pontjai, továbbá, minthogy OTA derékszögű háromszög a középarányossági tétel alapján:

$$OA \cdot OA' = \overline{OT}^2 = \varrho^2 = \lambda.$$

A kör segítségével értelmezett inverzió, tehát teljesen azonos azzal, melyet a Peaucellier inverzióra nyújt. Az inverzió körének sugarát az utóbbinál akkor nyerjük, ha egy szélső helyzetben A és A' fedésbe jut, ekkor $BB' \perp OAA'$ és ekkor $\lambda = a^2 - b^2 = \varrho^2$.

Az inverzió műveletének egyik alapvető tulajdonsága, hogy köröket megint körökké alakít át. (Lásd 2. feladat.) Ezzel a kijelentéssel előbbi állításunk, hogy O -n átmenő kör egyenessé invertálódik, nem áll ellentmondásban, amennyiben az egyeneseket végtelen nagy sugarú köröknek tekinthetni.

1. feladat. Rudakból oly szerkezetek készítenők, melyek az $r^2 = r + \lambda$ és $r' = \lambda - r$, vagyis eltolásokat létesítenek. (λ állandó.)

2. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha A kört ír le, úgy A' is kört fog leírni.

3. feladat. Megszerkeszthető-e a Peaucellier inverzor, ha $a > b$? s ha igen, hogyan jellemezhető az ilyen átalakítás.

Budapest.

Dr. Sós Ernő.