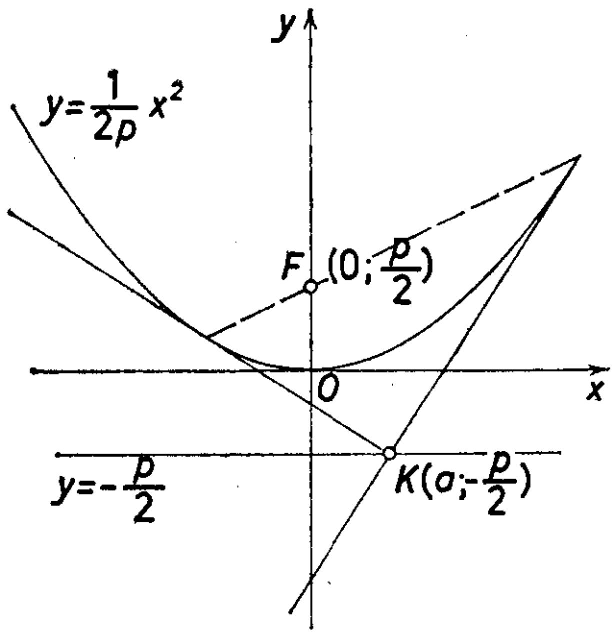
I. megoldás. A feladatot koordináta-geometriai módszerrel oldjuk meg. A koordináta-rendszer kezdőpontja legyen a parabola tengelypontja, az y-tengely a parabola szimmetriatengelye. „Felfelé nyitott” parabolát vizsgálunk, ennek egyenlete :

$$y = \frac{1}{2p}x^2,$$

ahol $p > 0$, a parabola paramétere. A parabola fókusza az $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$ pont, vezéregyenese az $y = -\frac{p}{2}$ egyenletű egyenes (1.ábra).



1. ábra

Egy, a parabola síkjában fekvő egyenest akkor tekintünk a parabola érintőjének, ha a parabolával egyetlen közös pontja van, és nem párhuzamos a parabola tengelyével. A vizsgált parabola érintői nem lehetnek tehát párhuzamosak az y-tengellyel, ezért az érintők egyenlete $y = mx + b$ alakban írható.

Legyen a vezéregyenes egy tetszőleges, de rögzített pontja $K\left(a; -\frac{p}{2}\right)$. A K pontra illeszkedő érintők egyenlete ilyen alakú lesz:

$$y = m(x - a) - \frac{p}{2},$$

ahol m-et kell meghatároznunk.

Az érintőnek a parabolával egy közös pontja van, ezért az

$$\frac{1}{2p}x^2 = m(x - a) - \frac{p}{2}$$

vagyis az

$$x^2 - 2pmx + 2pma + p^2 = 0$$

másodfokú egyenlet diszkriminánsának zérusnak kell lennie :

$$4p^2m^2 - 4(2pma + p^2) = 0.$$

Ennek alapján a két érintő meredeksége :

$$m_1 = \frac{1}{p}(a - \sqrt{a^2 + p^2}) \quad \text{és} \quad m_2 = \frac{1}{p}(a + \sqrt{a^2 + p^2}).$$

A P_1, P_2 érintési pontok x koordinátáját az egyenlet kétszeres gyöke, $x = pm$ adja, y koordinátáját pedig $y = \frac{1}{2p}x^2$:

$$P_1\left[a - \sqrt{a^2 + p^2}; \frac{1}{2p}(2a^2 + p^2 - \sqrt{a^2 + p^2})\right],$$

$$P_2\left[a + \sqrt{a^2 + p^2}; \frac{1}{2p}(2a^2 + p^2 + 2a\sqrt{a^2 + p^2})\right].$$

A P_1P_2 egyenes egyenlete az $(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)$ séma szerint

$$2\sqrt{a^2+p^2}\Big[y-\frac{1}{2p}(2a^2+p^2-2a\sqrt{a^2+p^2})\Big]=\frac{2a}{p}\sqrt{a^2+p^2}[x-(a-\sqrt{a^2+p^2})].$$

$x=0$ esetén, tekintve, hogy $\sqrt{a^2+p^2}\neq 0$:

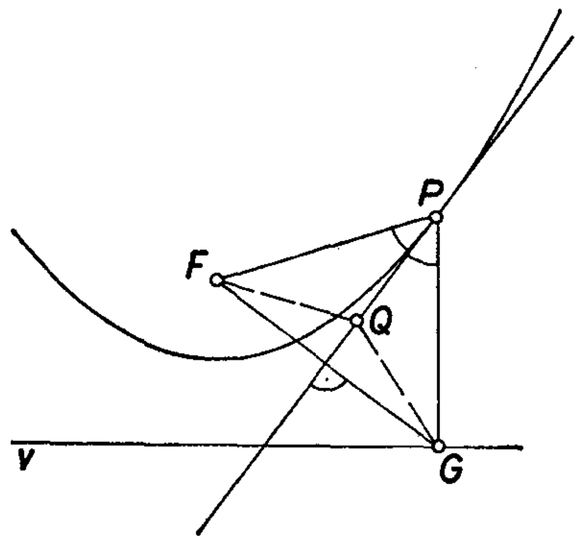
$$y=\frac{1}{2p}(2a^2+p^2-2a\sqrt{a^2+p^2})-\frac{a}{p}(a-\sqrt{a^2+p^2})=\frac{p}{2}.$$

Ezzel igazoltuk, hogy a fókuszpont illeszkedik a P1P2 egyenesre.

Bobák Emese (Jászárokszállás, Solymosi I. Gimn., III. o.t.)

II. megoldás. Bebizonyítjuk, hogy a parabola egy tetszőleges P pontjából a fókuszhoz húzott vezérsugár és a P pontból a vezéregyenesre bocsátott merőleges szögét felező egyenes érinti a parabolát.

Legyen P a parabolának egy tetszőleges pontja. P-ből a v vezéregyenesre bocsátott merőleges talppontját jelölje G, a parabola fókuszpontját F (2. ábra).



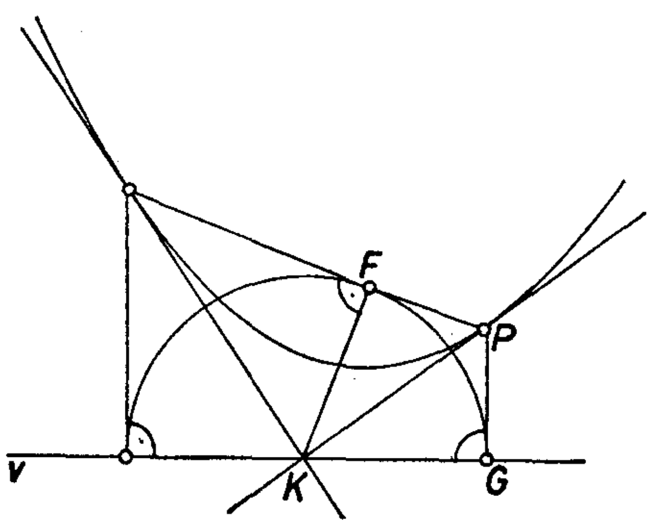
2. ábra

Belátjuk, hogy az $PFG\sphericalangle$ szögfelezőjének semelyik P-től különböző Q pontja nem lehet a parabolán.

Mivel az $FPG\sphericalangle$ sohasem 0, az $FPG\sphericalangle$ szögfelezője nem párhuzamos a parabola tengelyéve], és ennek megfelelően nem merőleges a vezéregyenesre. A szögfelezőn ezért P az egyetlen pont, amelynek merőleges vetülete a vezéregyenesen G.

Az $FPG\sphericalangle$ szögfelezője egyúttal az FG szakasz felező merőlegese is, hiszen a parabola definíciója szerint $PF=PG$. Így a szögfelező tetszőleges Q pontja ugyanakkora távolságra van F-tőI, mint G-től, de a szögfelezőn csak a P pont van ugyanakkora távolságra G-től, mint a vezéregyenestől.

Ezek után a feladat megoldása már könnyen adódik. Tekintsük a parabolának egy, a vezéregyenest K-ban metsző érintőjét (3. ábra).



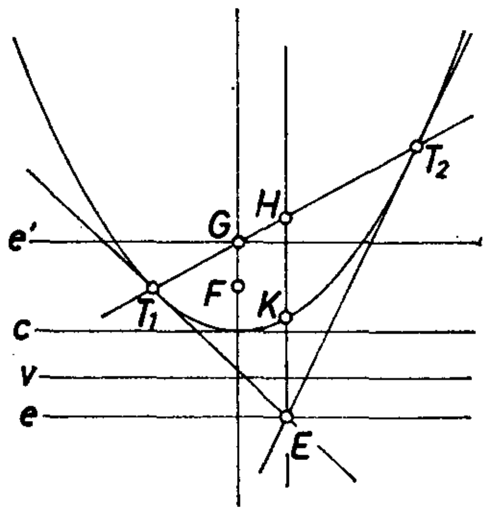
3. ábra

Mivel K az érintőn van, $KG = KF$. A PFK háromszög ezért egybevágó a PGK háromszöggel. Ebből következik, hogy $PFK\sphericalangle = PGK\sphericalangle = 90^\circ$, vagyis a vezéregyenes K pontjából a parabolához húzott érintő P érintési pontját F-fel összekötő egyenes merőleges a KF egyenesre. Mivel ez igaz a K pontra illeszkedő másik érintőre is, az érintési pontok és a fókuszpont valóban egy egyenesen vannak.

Tranta Beáta (Miskolc, Földes F. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Néhány dolgozat a $(0;1)$ pontot tekintette az $y = x^2$ parabola fókuszának, egyúttal az $y = -1$ egyenest használta fel mint vezéregyenest. Látszólag bebizonyították az állítást egy ál-fókuszra és ál-vezéregyenesre. Közelében jártak a következő tételnek.

Jelöljön e egy a vezéregyenessel párhuzamos, rögzített egyenest, E ennek egy tetszőleges pontját,T_1 és T_2 az E-ből húzott érintők érintési pontját, végül G a T_1T_2 egyenesnek a tengelyen levő pontját. Ekkor G állandó pont, éspedig rajta van e-nek a csúcsérintőre való tükörképén (4. ábra).



4. ábra

Legyen a parabola $y = x^2$, ekkor érintőjének iránytényezője az (x_1, x_1^2) pontban $2x_1$, az érintő egyenlete $y - x_1^2 = 2x_1(x - x_1)$. Legyen $x_2 \neq x_1$, az (x_2, x_2^2) pontbeli, $y = 2x_2x - x_2^2$ egyenletű érintő, ez az előbbit az $x = (x_1 + x_2)/2$ abszcisszán metszi. Ezt tekintjük E-nek, ordinátája x_1x_2.

Végül a T_1T_2 egyenes egyenlete $(y - x_1^2)(x_2 - x_1) = (x_2^2 - x_1^2)(x - x_1)$, ennek pedig az $x = 0$ abszcisszájú pontjához az $y = -x_1x_2$ ordináta tartozik.

Ha e azonos a vezéregyenessel, akkor G azonos a fókusszal.

2. Kapcsolatba hozhatják az érdeklődők az előbbieket a következőkkel. Jelölje a T_1T_2 húr felezőpontját H, az EH szakasz felezőpontját K. Ekkor K rajta van a parabolán és EH párhuzamos a tengellyel.