Mivel $1=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3=\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x$, továbbá

$$1=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x,$$

az $E(x)$ kifejezést a következő alakba írhatjuk:

$$\begin{aligned}E(x)&=1-3\sin^2 x\cos^2 x+p(1-2\sin^2 x\cos^2 x)=\\&=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x+p\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)=(1+p)-\frac{3+2p}{4}\sin^2 2x.\end{aligned}\tag{1}$$

Ha most $E(x)$ értéke független x-től, akkor például $E(0)=E(\pi/4)$, azaz $(1+p)=(1+p)-(3+2p)/4$. Tehát szükségképpen $p=-3/2$. Fordítva, ha $p==-3/2$, akkor $E(x)$értéke (1) alapján $-1/2$ minden x-re. Ezzel megválaszoltuk a feladat a) kérdését.

Ami b)-t illeti, feltehetjük, hogy $p\neq-3/2$, hiszen ekkor $E(x)=0$-nak nincs megoldása. (1) alapján $E(x)=0$ akkor és csak akkor, ha

$$\sin^2 2x=\frac{4(1+p)}{3+2p}=1+\frac{1+2p}{3+2p}.$$

Ezt kielégítő x pedig akkor és csak akkor létezik, ha

$$0\le\frac{4(1+p)}{3+2p}=1+\frac{1+2p}{3+2p}\le 1.$$

Az első egyenlőtlenség akkor áll, ha $p<-3/2$, vagy $p\ge-1$; a második egyenlőtlenség pedig csak a $-3/2<p\ge-1/2$ értékre teljesül. Így az $E(x)=0$ egyenletnek akkor és csak akkor van megoldása, ha $-1\le p\le-1/2$.