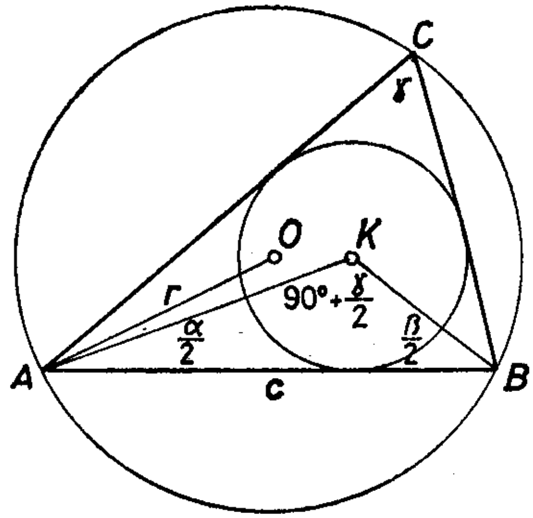
I. megoldás. Jelöljük az ABC háromszög szögeit és oldalait a szokott módon. A háromszög köré írható kör középpontja O, sugara a feladat szerint $r = 1$.

A feltételi egyenletben szereplő szakaszokat a háromszög szögeivel hozzuk összefüggésbe. Példaképpen KA-t vizsgáljuk (1. ábra).



1. ábra

Az AKB háromszög A-nál és B-nél fekvő szögei $\frac{\alpha}{2}$, ill. $\frac{\beta}{2}$, K-nál levő szöge ezért $90^\circ + \frac{\gamma}{2}$. Mivel $AB = c = 2r\,\sin\gamma = 2\sin\gamma$, az AKB háromszögben a sinustétel alapján

$$KA = \frac{2\,\sin\gamma\sin\dfrac{\beta}{2}}{\sin\left(90^\circ + \dfrac{\gamma}{2}\right)}.$$

Felhasználva, hogy

$$\sin\gamma = 2\,\sin\frac{\gamma}{2}\,\cos\frac{\gamma}{2},$$

továbbá, hogy

$$\sin\left(90^\circ + \frac{\gamma}{2}\right) = \cos\frac{\gamma}{2},$$

(1) $$KA = 4\,\sin\frac{\beta}{2}\,\sin\frac{\gamma}{2}$$

Hasonló módon kapható

$$KB = 4\,\sin\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\gamma}{2} \quad \text{és} \quad KC = 4\,\sin\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\beta}{2}.$$

A feladat feltétele folytán

$$64\,\sin^2\frac{\alpha}{2}\,\sin^2\frac{\beta}{2}\,\sin^2\frac{\gamma}{2} = 1,$$

vagyis – tekintettel arra, hogy egy háromszög szögeiről van szó –

(2) $$8\,\sin\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\beta}{2}\,\sin\frac{\gamma}{2} = 1.$$

$$2\,\sin\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

és

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}$$

felhasználásával pedig

$$4\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2} = 1.$$

Belátjuk, hogy a bal oldali kifejezés csak $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ esetén lehet egyenlő 1-gyel, minden más esetben ennél kisebb.

$\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ maximális értéke 1. Ezt akkor veszi fel, ha $\alpha=\beta$. Ez y-ra nem jelent megszorítást.

$$4\left(1-\sin\frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}=1-\left(1-2\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2.$$

Viszont legnagyobb értékét (1-et) $\sin\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{1}{2}$ esetén veszi fel. Ekkor $\gamma=60°$, és mivel még $\alpha=\beta$ is fenn kell álljon, ezért valóban csak szabályos háromszögre áll fenn az egyenlőség.

Bolla József (Fonyód, Karikás F. Gimn., III. o. t.)

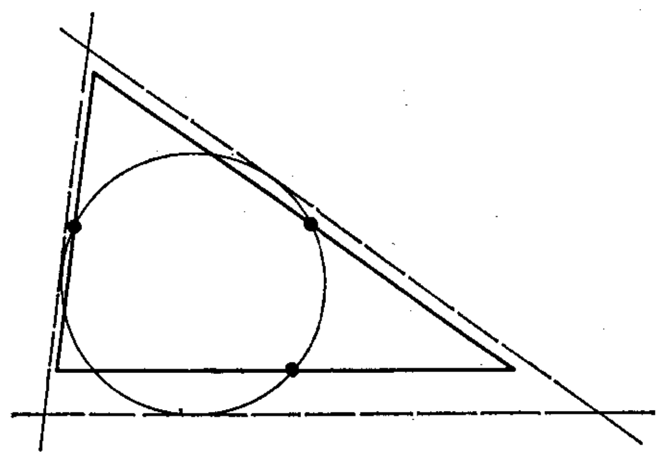
II. megoldás. Jelöljük az ABC háromszögbe írt kör sugarát ϱ-val. Az I. megoldásban vizsgált KA szakasz hossza ezzel is kifejezhető, hiszen $\varrho=KA\sin\dfrac{\alpha}{2}$, így (1) alapján

$$\varrho=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Ezt az I. megoldásban kapott (2) összefüggéssel összevetve kapjuk, hogy a feladat feltétele ekvivalens a

$$\varrho=\frac{1}{2} \tag{3}$$

feltétellel. Rajzoljuk meg az ABC háromszög oldalfelező pontjain átmenő kört, ennek nyilván $\dfrac{1}{2}$ a sugara. Húzzuk meg ennek az oldalakkal párhuzamos érintőit (2. ábra).



2. ábra

Ezek az eredeti háromszöget tartalmazó, ahhoz hasonló háromszöget határoznak meg. Mivel az ebbe írt kör sugara $\dfrac{1}{2}$, az eredetibe írt kör sugara ennél nem lehet nagyobb: $\varrho\le\dfrac{1}{2}$. Itt egyenlőség csak akkor lehet, ha az oldal felező pontokon átmenő kör érinti az oldalakat, vagyis a beírt és körülírt körök középpontja egybeesik. Ekkor viszont a háromszög nyilván szabályos.

Megjegyzések. 1. A II. megoldásban a $\varrho\le\dfrac{r}{2}$ összefüggést bizonyító meggondolás – tudomásunk szerint – *Gallai Tibor*tól származik.

2. Ha már tudjuk (3)-at, ebből a beírt és körülírt kör középpontjának az egybeesésére az Eulertől származó

$$OK^2=r(r-2\varrho)$$

összefüggés alapján is következtethetünk, hiszen (3) és (4) együtt épp azt jelenti, hogy OK hossza 0.