I. megoldás. Válasszuk koordináta-rendszerünk origójául a C_1 csúcsot, x tengelyéül a C_1C_2 egyenest, legyen C_2 abszcisszája a_2 és C_3 ordinátája b_3. Ekkor a feladat szerint az y tengely a C_1C_6 egyenes lesz, jelöljük C_6 ordinátáját b_6-tal és C_5 abszcisszáját a_5-tel. Így a hatszög csúcsai:

$$C_1(0:0),\quad C_2(a_2,0),\quad C_3(a_2,b_3),\quad C_4(a_5,b_3),\quad C_5(a_5,b_6)\ \text{ és }\ C_6(0,b_6),$$

és azt kell belátnunk, hogy a C_2C_5 és C_6C_3 egyenesek P metszéspontja rajta van a C_1C_4 egyenesen, melynek egyenlete

$$y=\frac{b_3}{a_5}x.$$

Természetesen a_2 és a_5 különbözők egymástól és 0-tól, hasonlóan b_3 és b_6 is egymástól és 0-tól.

A mondott egyenesek egyenlete rendre

$$y=\frac{b_6}{a_5-a_2}(x-a_2),\qquad \text{ill.}\qquad y=b_6+\frac{b_3-b_6}{a_2}x, \tag{1}$$

ezekből P abszcisszája

$$x_P=\frac{a_2a_5b_6}{a_2b_6-(a_5-a_2)(b_3-b_6)}, \tag{2}$$

hacsak a N nevező nem tűnik el, azaz ha

$$N=a_2b_6-(a_5-a_2)(b_3-b_6)=a_2(a_5-a_2)\left(\frac{b_6}{a_5-a_2}-\frac{b_3-b_6}{a_2}\right)\neq 0,$$

vagyis ha (1)-ben az iránytangensek különbözők. Ekkor P ordinátájára a második egyenletből

$$\frac{y_P}{b_6}=1+\frac{(b_3-b_6)a_5}{N}=\frac{a_2b_3}{N}. \tag{3}$$

Mármost (3) és (2) egybevetéséből valóban

$$\frac{y_P}{x_P}=\frac{b_3}{a_5},$$

ezt akartuk bizonyítani.

Ha azonban az (1)-beli iránytényezők egyenlők, vagyis $C_2C_5\parallel C_6C_3$, ebből átalakítással

$$\frac{b_6}{b_3-b_6}=\frac{a_5-a_2}{a_2} \tag{4}$$

(egyik nevező sem nulla!), mindkét oldalhoz 1-et adva

$$\frac{b_3}{b_3-b_6}=\frac{a_5}{a_2},\qquad \text{és így}\qquad \frac{b_3}{a_5}=\frac{b_3-b_6}{a_2},$$

azaz $C_1C_4\parallel C_6C_3$. Ilyenkor a kérdéses három egyenes közül semelyik kettő nem metszi egymást, és a feladat állítása „projektív értelemben” igaz, vagyis ahogyan azt szokás mondani, hogy párhuzamos egyeneseknek a végtelen távolban van a közös pontja, és hogy a különböző irányokhoz tartozó végtelen távoli pontok a végtelen távoli egyenest alkotják.

Megjegyzés. A párhuzamosság esetére talált (4) feltétel a 3–3 párhuzamos oldalegyenes közti távolságok között összefüggést jelent, hiszen pl. $|b_3-b_6|$ a C_3C_4 és C_5C_6 egyenesek távolsága.

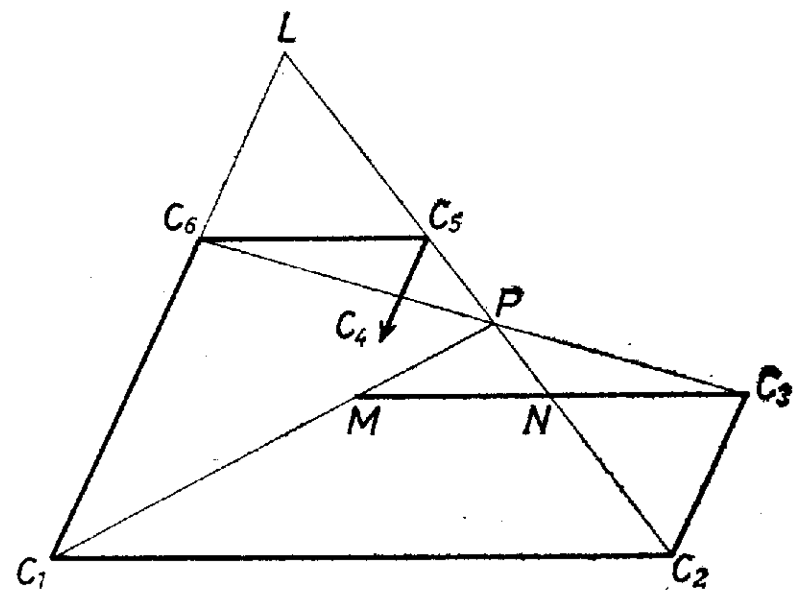
II. megoldás. Elemi meggondolásokkal is célhoz érhetünk. Elég tulajdonképpen egyetlen tájékoztató ábra is, ha abból a föltevésnek csak a következő tartalmát olvassuk ki:

α) $k=1,\ 2,\ 3$ esetén a $C_{2k}C_{2k-1}$ egyenesek i' iránya közös, másrészt a $C_{2k}C_{2k+1}$ egyenesek i'' iránya is – ahol C_7-en is a C_1 csúcsot értjük;

β) a 3–3 párhuzamos egyenes különböző.

Azt azonban egyik hármasban sem akarjuk felhasználni, hogy melyik egyenes van a másik kettő között. Nem használjuk ki azt sem, hogy i'' merőleges i'-re, csupán azt, hogy i' és i'' különböző irányok.

1. Tegyük föl, hogy a C_2C_5 és C_3C_6 egyeneseknek van közös P pontjuk, és jelöljük PC_1 és C_3C_4 metszéspontját M-mel (1. ábra).



1. ábra

(Könnyű belátni, hogy P nem lehet rajta egyiken sem a 3–3 oldalegyenes közül.) Azt mutatjuk meg, hogy $C_5M \parallel C_6C_1$. Ebből már következik, hogy M azonos C_4-gyel, tehát P-n az állításbeli C_1C_4 egyenes is átmegy.

Jelöljük a C_2C_5 egyenesnek C_1C_6-on levő metszéspontját L-lel, C_3C_4-en levő pontját N-nel. Ezáltal a C_5C_6 és NC_3 párhuzamos szakaszokra támaszkodva két pár hasonló háromszöget használhatunk fel, további oldalpárjaik párhuzamosak, ill. egy egyenesbe esnek.

Az LC_5C_6 és C_2NC_3 háromszög-pár megfelelő oldalaira teljesül

$$\frac{C_5C_6}{C_5L} = \frac{NC_3}{NC_2},$$

és a PC_5C_6, PNC_3 párban

$$\frac{PC_5}{C_5C_6} = \frac{PN}{NC_3}.$$

E két egyenlőséget összeszorozva a C_2C_5 egyenesen keletkezett 4 szakasz között kapunk kapcsolatot:

$$\frac{PC_5}{C_5L} = \frac{PN}{NC_2}.$$

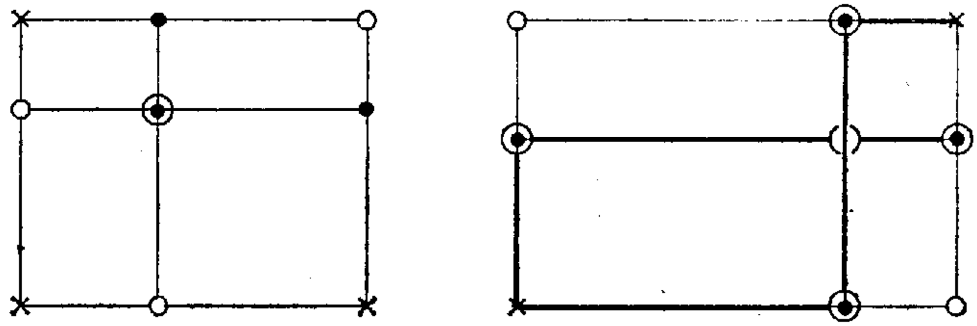
A jobb oldal pedig egyenlő a $\dfrac{PM}{MC_1}$ arány értékével, hiszen C_1C_2 párhuzamos MN-nel, eredeti jelölése szerint C_3C_4-gyel. Most már a

$$\frac{PC_5}{C_5L} = \frac{PM}{MC_1}$$

arány a párhuzamos szelők tételének megfordítása alapján azt jelenti, hogy C_5M párhuzamos LC_1-gyel, vagyis C_6C_1-gyel. Ezt akartuk belátni. – Hozzátesszük még, hogy a feladat feltételei szerint P a C_2L szakaszhoz képest ugyanúgy helyezkedik el, mint a C_3C_6 szakaszhoz képest – vagyis vagy magán e két szakaszon van rajta, vagy a szakasz kezdőpontján inneni meghosszabbításon van, vagy pedig a végponton túli meghosszabbításon –, továbbá folytatólag ugyanúgy helyezkedik el P az NC_5-höz képest is, mint a C_3C_6-hoz. Másrészt P az MC_1-hez képest is ugyanúgy helyezkedik el, mint NC_2-höz képest, vagyis ahogyan a C_5L-hez képest. Más szóval azt jelentik ezek, hogy akkor is igazak számításaink, ha a távolságokhoz valami egységes elv szerint előjelet kapcsolunk, mintegy koordináta-rangra emeljük őket.

2. Ha P nem jön létre, vagyis $C_2C_5 \parallel C_3C_6$, akkor megmutatjuk, hogy C_1C_4 is párhuzamos velük. Ezt visszavezetjük az előzőkre. Ha C_1C_4 metszené – mondjuk – C_2C_5-öt egy Q pontban, akkor először jelölés- (ill. index-) cserét végzünk: C_i helyére C_{i+1}-et írunk $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ mellett, és C_6 helyére C_1-et. Így a feltételezett Q pont az új C_2C_5 és C_3C_6 egyenesek metszéspontja, és a föntiek szerint átmegy rajta az új C_4C_1 is, vagyis az eredeti C_6C_3. Föltevésünk második része ellentmondásra jut az első résszel, ez bizonyítja az ellentétes állítás lehetetlenségét.

Megjegyzések. 1. Több versenyző túl sok változatot vizsgált a hatszög csúcsainak kölcsönös helyzetére, mások viszont egyáltalán nem törődtek evvel. Lényegében csak kétféle ábratípus lehetséges: a 3–3 párhuzamos közül a középsőknek a közös pontja vagy szerepel a 6 csúcs között, vagy pedig nem (2. ábra). Az indexelést fölösleges tekinteni, mert az állításban az indexelés szimmetrikus, amit az ellentmondásra vezető meggondolásban fel is használtunk, hangsúlyozása nélkül. Csak a második típusban lehetséges, hogy a C_1C_4, C_2C_5 és C_3C_6 egyenesek párhuzamosak legyenek.



2. ábra

2. A II. megoldás mutatja, hogy tulajdonképpen nem is lehetett volna kihasználni az eredeti hatszög derékszögeit, csak a matematikai gondolkodás „arculcsapásával”, fölösleges elemként beleerőltetve a meggondolásba. Rámutatunk a feladat eredeti szövegére, az nem beszélt szögekről, csak merőleges állású oldalegyenes-párokról.

Az I. megoldásból amiatt nem adódhatott ki ez az észrevétel, mert az iskolai oktatásban még a derékszögű koordináta-rendszer használatára is csak kevés idő jut, szó sem eshet ferdeszögű koordináta-rendszerről.

Más szemszögből nézve ezt kaptuk: ha ábránkat párhuzamos vetítéssel átvisszük egy tetszőleges másik (vagyis az eredetivel nem párhuzamos) síkra, egyeneseink képe egyenes lesz, meglesz a közös pontjuk is, megmaradnak a párhuzamosságok is de a derékszögek általában nem maradnak meg.