I. megoldás. Vezessük be az $u = \dfrac{x+y}{2}$ és a $v = \dfrac{x-y}{2}$ jelöléseket. Ezekkel $x = u+v,\ y = u-v$, és egyenletrendszerünk a következőképpen alakul:

$$2\cos u \cos v = 2\cos^2 u - 1, \tag{1}$$

$$2\sin u \cos v = 2\sin u \cos u. \tag{2}$$

(1) alapján $\cos u \neq \cos v$, hiszen $2\cos^2 u \neq 2\cos^2 u - 1$, így (2) pontosan akkor teljesül, ha $\sin u = 0$, azaz

$$u = k\pi$$

valamilyen k egész számmal. Ekkor $\cos u = (-1)^k$, és (1)-ből $\cos v = (-1)^k/2$, azaz

$$v = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi + 2l\pi,$$

ahol l egész szám. Az (1) és (2) egyenleteket ezek és csak ezek az u, v számok elégítik ki, így az eredeti egyenletrendszer megoldásai

$$x = u+v = \pm\frac{\pi}{3} + 2(k+l)\pi, \qquad y = u-v = \mp\frac{\pi}{3} + 2l\pi,$$

ahol k és l tetszőleges egészek.

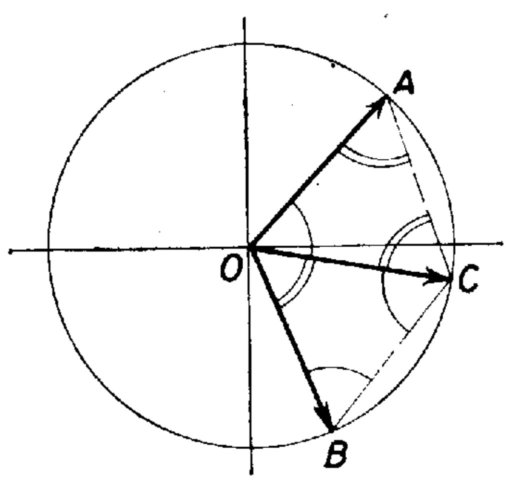
II. megoldás. Jelöljük az első koordináta-tengely pozitív irányával x, illetve y szöget bezáró egységvektort $\mathbf{a}$-val, illetve $\mathbf{b}$-vel, az $x+y$ szöget bezáró egységvektort pedig $\mathbf{c}$-vel. Jelöléseink mellett a feladat egyenletrendszere ekvivalens a

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \tag{3}$$

egyenlettel. Jelöljük továbbá az origót O-val, az O-ból induló $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok végpontját pedig A-val, B-vel, C-vel.

Mivel $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ egységvektorok, a (3) egyenlet azt jelenti, hogy a következő három eset valamelyike következik be:

1. $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egyirányúak, ekkor $\mathbf{c}$ a kétszeresük;
2. $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ ellentétes irányúak, ekkor $\mathbf{c}$ null-vektor;
3. az $OACB$ négyszög paralelogramma.



Mivel másfelől $\mathbf{c}$ is egységvektor, csak a harmadik eset jöhet szóba. Ekkor $AC \parallel OB$, $BC \parallel OA$ miatt az O-nál levő szögek C-nél is megjelennek, és $OA = OC = OB$ miatt átmásolhatóak A-ba, B-be. Ámde ekkor csak $60°$-osak lehetnek, és emiatt

$$x = \pm 60° + n \cdot 360°,$$
$$y = \mp 60° + m \cdot 360°,$$

ahol n, m tetszőleges egészek.