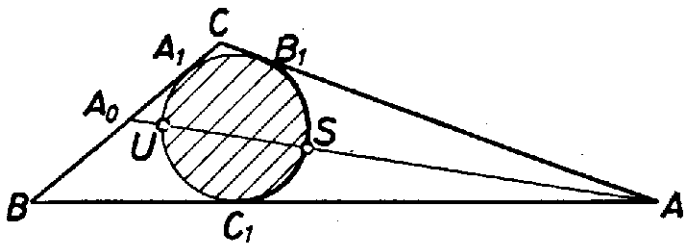
I. megoldás. 1. Azt várjuk, hogy a súlypontnak a beírt körre való illeszkedése alapján valamilyen összefüggés írható fel a háromszög alkalmas alkotó részei között. Előkészítésül ilyet keresünk; a szokásos jelöléseket használjuk.

A beírt körnek az AB, BC, CA oldalon levő C_1, A_1, B_1 érintési pontjai a kört három ívre osztják, válasszuk úgy a betűzést, hogy az S súlypont az A_1-et nem tartalmazó B_1C_1 íven legyen. Más szóval — a kört átlátszatlannak tekintve – S az A csúcsból látható, B-ből és C-ből nem látható. Jelöljük a kör és az AA_0 súlyvonal második közös pontját U-val, ez tehát az SA_0 szakaszon van. Legyen továbbá $AC \leqq AB$, így $A_1C \leqq A_0C$, tehát A_1 az A_0C szakaszon van, esetleg A_0-ban.



Kétszer alkalmazzuk a szelő–érintő tételt, előbb az A, majd az A_0-ból kifutó félegyeneseken levő szakaszokra:

$$AS \cdot AU = AB_1^2, \quad A_0S \cdot A_0U = A_0A_1^2.$$

(Felírhatjuk ezeket az ASB_1 és AB_1U, illetve A_0UA_1 és A_0A_1S háromszögpárok hasonlósága alapján is.)

Ismeretes, hogy $AB_1 = (b+c-a)/2$, hasonlóan $A_0A_1 = A_0C - CA_1 = a/2 - (a+b-c)/2 = (c-b)/2 (\geqq 0)$. Legyen még $A_0U = u$ és $A_0A = d$, ekkor $A_0S = d/3$ és $AS = 2d/3$, hiszen S harmadolja AA_0-t ; másrészt az $ACDB$ paralelogramma oldalai és átlói közti összefüggés alapján

$$4d^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2,$$

(ez is ismert összefüggés). Mindezekkel

$$AB_1^2 + 2A_0A_1^2 = \frac{2d}{3}(d-u) + \frac{2d}{3}u = \frac{2d^2}{3},$$

$$\frac{(b+c-a)^2}{4} + \frac{(c-b)^2}{2} = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{6},$$

végül

(1) $$5(a^2+b^2+c^2) = 6(ab+ac+bc).$$

Ezzel összefüggést kaptunk mindazon háromszögek oldalai között, amelyekben a beírt kör áthalad S-en, tekintet nélkül jelöléseink kezdeti megválasztására, hiszen a megkülönböztetett szerepű a oldal itt egyenrangúnak bizonyult b-vel és c-vel.

Az $a = 2r\sin\alpha$ stb. összefüggések alapján (r a körülírt kör sugara) a kérdéses tulajdonságú háromszögekben nyilvánvalóan ez is teljesül:

(2) $$5(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) = 6(\sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha\sin\gamma + \sin\beta\sin\gamma).$$

2. Legyen most már $\gamma = 120°$, tehát $\sin\gamma = \sqrt{3}/2$ és $\alpha + \beta = 60°$. Behelyettesítéssel és átrendezéssel

$$5(\sin\alpha + \sin\beta)^2 - 16\sin\alpha\sin\beta + \frac{15}{4} - 3\sqrt{3}(\sin\alpha + \sin\beta) = 0.$$

A következő átalakításokkal az $x = \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ ismeretlenre kapunk egyenletet:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = \left(2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - 1\right) - \frac{1}{2},$$

végül

$$-11x^2 - 3\sqrt{3}x + \frac{63}{4} = 0.$$

Diszkriminánsa pozitív: $720 = (12\sqrt{5})^2$, gyökei valósak és ellentett előjelűek, feladatunkban csak a pozitív gyök értelmezhető:

$$x = \frac{12\sqrt{5} - 3\sqrt{3}}{22},$$

amiből $\alpha \leqq \beta$ figyelembevételével

$$\frac{\alpha-\beta}{2}=-10°,4275.$$

Ezt $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=30°$-hoz hozzáadva, ill. belőle levonva:

$$\alpha = 19°,5725 \quad (=19°34'),$$

$$\beta = 40°,4275 \quad (=40°26'),$$

a feladat kérdésére megadtuk a választ.

Megjegyzések. 1. Többen észrevették, hogy az a, b, c oldalakra megállapított (1) összefüggés megtalálható lapunk egy régebbi pályázatának eredménybeszámolójában K. M. L. 34 (1967) 205—212. oldal.

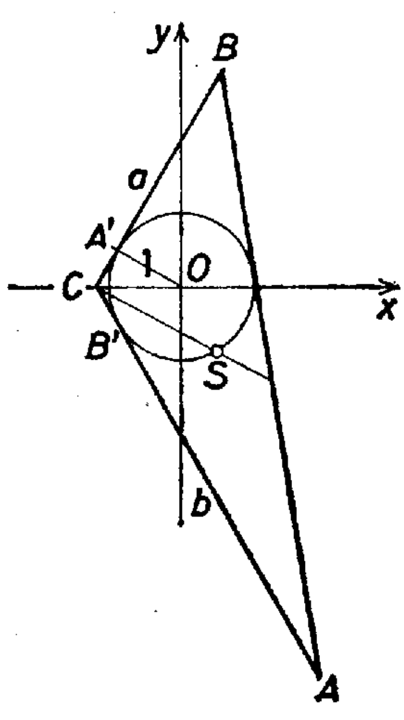
2.Több megoldás hivatkozott a következő tételre:

$$OS^2=\varrho^2-\frac{s^2}{3}+\frac{2}{9}(a^2+b^2+c^2),$$

ahol O a beírt kör középpontja és ϱ a sugara. (Lásd pl. *Szikszai József*: Háromszöggel kapcsolatos feladatok koordinátageometriai megoldása, Középisk. Szakköri Füzetek, Tankönyvkiadó, Bp., 1977. 39. oldal.) Esetünkben $OS=\varrho$, tehát $3s^2=2(a^2+b^2+c^2)$, ebből is kiadódnék a fönti (1), de annak kialakítása nélkül is rátérhetünk a szögek számítására.

3. A felhasznált összefüggések szokatlansága nem kínált számításos módot az eredmény ellenőrzésére. Számpéldában azonban mindig rendelkezésre áll az eredmény mérethű megrajzolása, a jelen esetben hozzáértve a kört és az S pontot is. Ez az eljárás — a rajz kis pontatlanságai ellenére — kiáltóan megmutathatta volna, hogy a több dolgozatban is szereplő $11°,5$ és $48°,5$ eredmény hibás; ezekkel OS közel $2,5\varrho$-val egyenlő.

II. megoldás. A koordináta-geometria módszereivel először a háromszögnek a $\gamma=120°$-os szögét bezáró a és b oldalait számítjuk ki, hosszegységnek választva a beírt k kör ϱ sugarát. Legyen k középpontja az origó, a C csúcs az tengely negatív felén, A a tengely alatt, így B fölötte.



CO felezi a γ szöget, tehát a CB oldalegyenes irányszöge $60°$, CA-é $-60°$ és a csúcsok, majd ezekből az S súlypont koordínátái:

$$A\left(-\frac{2}{\sqrt3}+\frac{b}{2},\quad -\frac{b\sqrt3}{2}\right),\qquad B\left(\frac{-2}{\sqrt3}+\frac{a}{2},\quad \frac{a\sqrt3}{2}\right),$$

$$C\left(-\frac{2}{\sqrt3},\quad 0\right),\qquad S\left(-\frac{2}{\sqrt3}+\frac{a+b}{6},\quad \frac{(a-b)\sqrt3}{6}\right).$$

S koordinátái kielégítik a beírt kör – az egységkör – egyenletét:

$$\left(-\frac{2}{\sqrt3}+\frac{a+b}{6}\right)^2+\frac{3(a-b)^2}{36}=1,$$

alkalmasan átrendezve

$$(a+b)^2-2\sqrt{3}(a+b)-3ab+3=0. \tag{3}$$

C-ből a körhöz húzott érintőszakaszok hossza egyfelől $CA'=1/\sqrt{3}$, másfelől az ismert összefüggés szerint $(a+b-c)/2$, egyenlőségükből $c=(a+b)-2/\sqrt{3}$, és a cosinustételnek c-re való alkalmazásával

$$\left(a+b-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=a^2+b^2+ab,$$

azaz

$$3ab-4\sqrt{3}(a+b)+4=0. \tag{4}$$

Ezt (3)-mal egybekapcsolva egyenletrendszert kapunk az a és b oldalak összegére és szorzatára mint ismeretlenekre. Kiküszöböljük a szorzatukat:

$$(a+b)^2-6\sqrt{3}(a+b)+7=0,$$

$$a+b=3\sqrt{3}\pm2\sqrt{5}\qquad(=9,668,\ \text{ill. } 0,724).$$

Innen csak a nagyobb gyököt használhatjuk, hiszen $a+b>2\cdot CA'=2/\sqrt{3}>1$.

Most már (4) alapján

$$ab=\frac{32+8\sqrt{15}}{3},\qquad(=20,9939)$$

ennélfogva a és b a következő másodfokú egyenlet gyökei:

$$u^2-(3\sqrt{3}+2\sqrt{5})u+\frac{32+8\sqrt{15}}{3}=0.$$

Legyen $a\leqq b$, ekkor

$$a,b=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\sqrt{5}\mp\sqrt{\frac{13+4\sqrt{15}}{12}}=\begin{cases}3,293,\\6,375.\end{cases}$$

Végezetül az OAB', ill. OBA' derékszögű háromszögből

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{AB'}{OB'}=b-CB',\qquad\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=a-CA',$$

$$\alpha=19^\circ,57,\qquad\qquad\beta=40^\circ,43$$

(amiből $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$). Ezzel befejeztük a megoldást.

Szuhai Erika (Miskolc, Kossuth Gimn., IV. o. t.)
Megyesi Gábor (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., I. o. t.)

Megjegyzés. Több beküldő hasonló lépésekkel a-ra és b-re szimmetrikus (más néven reciprok) egyenletre jutott, és azt – szokásosan – az $x+\dfrac{1}{x}=y$ új ismeretlenre áttérve oldotta meg, két szakaszban, az ismert módon.

A föntiekben sikerült megkerülnünk ezt, mi is felhasítottuk egyenletünket két másodfokúra, és az $a+b<1$ megoldásokat eleve kizártuk.