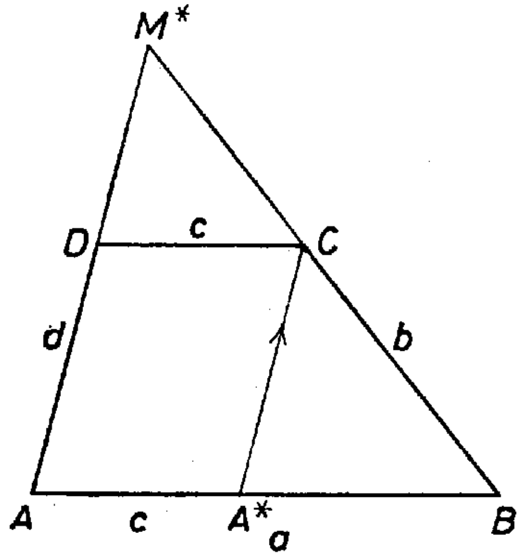
I. megoldás. A szöveg szerint a négyszög CD oldala mozog, tehát a rögzített oldal AB. És akkor $CD||AB$, továbbá a CD oldal változatlan c hossza kisebb $AB = a$-nál.



Jelöljük az AD és BC szárak metszéspontját M-mel, ez $c < a$, valamint a trapéz konvexsége alapján mindig létezik és az AB egyenesnek a CD-t tartalmazó partján van. Legyen még $AM = d$, $BM = b$, végül a változó oldalak állandó összege $AD + DC + CB = k$.

A párhuzamos szelők tétele alapján a szárak hossza:

$$AD = \left(1 - \frac{c}{a}\right)d, \qquad CB = \left(1 - \frac{c}{a}\right)b,$$

ezeket a föltételi egyenlőségbe helyettesítve

$$\left(1 - \frac{c}{a}\right)(d + b) + c = k,$$

és átrendezve az MA és MB távolságok összege

$$d + b = \frac{a}{a - c}(k - c) = \frac{k - c}{a - c}a = \lambda a.$$

Itt a jobb oldal egyfelől állandó, másfelől a második alak szerint nagyobb, mint a, hiszen a trapéz létezik, tehát $k > a$; más szóval $\lambda > 1$. Eszerint M mindig rajta van azon az ellipszisen, amelynek fókuszai a rögzített A, B csúcsok és nagytengelyének hossza λa.

Megfordítva, M ennek az ellipszisnek minden pontjába eljut — kivéve a nagytengelyének a végpontjait —, mert az ellipszis minden ki nem zárt pontjához található CD-nek azt előállító helyzete. Legyen M^* az ellipszis tetszőleges, ki nem zárt pontja – így M^*AB valóságos háromszög, továbbá A^* az a pontja az AB alapnak amelyre $AA^* = c(< a = AB)$. Az A^*-on átmenő és M^*A-val párhuzamos egyenes M^*B-t nyilván a megfelelő C pontban metszi.

Az ellipszis nagytengelyének végpontját véve M-nek, a trapéz elfajulna, hiszen C, D is rajta lenne AB-n, igy pedig AD és BC közös pontja határozatlan.

II. megoldás. Az előző megoldás ábrájához kapcsolódva $A^*C = AD$, ennélfogva

$$A^*C + CB = AC + DC + CB - DC = k - c,$$

állandó, C rajta van azon az e_1 ellipszisen, amelynek fókuszai B és A^* (utóbbi az adatokból egyértelműen meghatározható), és vezérsugarainak összege állandóan $(k - c)$.

Másrészt M a BC félegyenesen van, és — mint már felhasználtuk,

$$BM = b = \frac{a}{a - c} \cdot BC,$$

ezért M pályája az e_1-nek B centrumú $a/(a - c)$ arányú nagyított képe, ellipszis.

Másik F_2 fókusza az A^* képe ebben a nagyításban, tehát $BF_2 = \dfrac{a}{a - c} \cdot BA^* = a = BA$ alapján A-ban van, nagytengelye pedig — ami a pályának *lineáris* mérete:

$$\frac{a}{a - c}(k - c),$$

ahogy az I. megoldásban is láttuk.

Megjegyzés. Szóljunk egyszer a helyes magyar beszédnek egy ide vágó eleméről is! Vannak a matematikának olyan kérdései, amelyek megoldásához közeledve – példán folytatjuk – *helyes* ez a beszédmód: az X pont *egy olyan* vonalon van rajta, amely …. A megoldás befejeződhet azzal, hogy *az olyan* vonalak közül kikeressük *azt* (vagy azokat), amely már minden tekintetben megfelel.

Ez kissé divatossá vált. Megvan azonban a közbeszédben is, idézhetnénk az irodalomból, már a múlt századból való példákat is. Csakhogy azoknak megvan a maguk megfelelő háttere!

Példánkban azonban nincs szükség erre, *ez itt* fölösleges köntörfalazás. Amilyen ez a szintén divatos bizonytalankodás: „… hát ezt én így mondanám …”. Tisztán látjuk, hogy *csak egy olyan* ellipszis van, ezt a magyar nyelv tömören így mondja, *az az* ellipszis, ….

Már halljuk az ellenvéleményt: az AB mint tengely körüli forgatással a térben végtelen sok olyan van. Akkor volna helyes ez a védekezés, ha 1. az előzmények alapján szó lehetne a térről, 2. utána igy zárná le a vitatkozó: *egy olyan* ellipszis, mégpedig *az* (az egyetlen), *amely* benne van a trapéz síkjában.

Pedig a trapéz síkjáról nem beszéltünk korábban! Mert természetesnek vesszük, hogy a feladat síkban értendő.

Ez a „háttér” sok geometriai feladathoz hozzáértendő. Hanem ha valahol megbújik a szövegben valami kis említés síkról, akkor már a térre is gondolni kell – azért, mert nem mondták ki, de céloztak rá.

(B. T.)