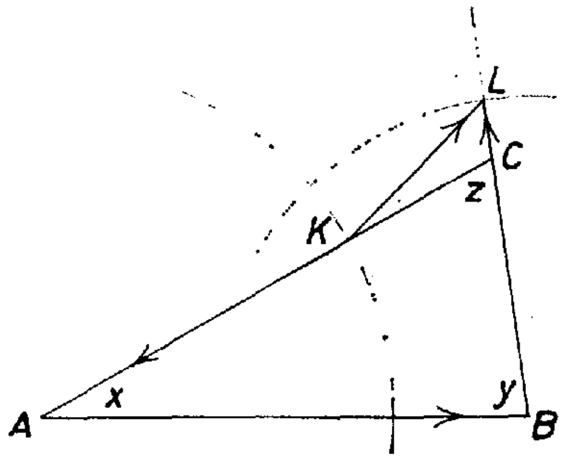
Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a \geqq b \geqq c$, s így $\dfrac{ab}{c} \geqq \dfrac{ac}{b} \geqq \dfrac{bc}{a}$.

Legyen az A és B pontok távolsága $\sqrt{ab/c}$, s legyen C a síknak az a pontja, melyre az ABC háromszög szögei éppen x, y, illetve z (1. ábra).



1. ábra

Vegyük fel az AC félegyenesen a K pontot úgy, hogy $AK = \sqrt{ac/b}$, s a BC félegyenesen az L pontot úgy, hogy $BL = \sqrt{bc/a}$ legyen. Világos, hogy K az A középpontú, $\sqrt{ac/b}$ sugarú körön, L pedig a B középpontú, $\sqrt{bc/a}$ sugarú körön van. Elsőként a KL távolságot határozzuk meg. Ehhez vegyük észre, hogy a $\overrightarrow{KL}$ vektor a $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BL}$ vektorok összege, ahonnan

$$KL^2 = \left(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL}\right)^2 = KA^2 + AB^2 + BL^2 + 2\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{AB} +$$
$$+ 2\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{BL} + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BL}.$$

Az itt szereplő három skaláris szorzat értékét könnyen megkaphatjuk, hiszen a $\overrightarrow{KA}$ és $\overrightarrow{AB}$ vektorok szöge $180^\circ - x$, az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BL}$ szöge $180^\circ - y$, végül $\overrightarrow{BL}$ és $\overrightarrow{KA}$ szöge $180^\circ - z$, továbbá a vektorok hossza is ismert. Így

(1) $$KL^2 = KA^2 + AB^2 + BL^2 - 2KA\cdot AB\cdot\cos x -$$
$$-2AB\cdot BL\cdot\cos y - 2BL\cdot KA\cdot\cos z,$$

amiből

(2) $$2a\cos x + 2b\cos y + 2c\cos z = \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} - KL^2,$$

Így a kérdéses kifejezés a maximumát akkor veszi fel, amikor a KL távolság a minimumát. Ha most a fenti két kör metszi egymást, azaz

(3) $$\sqrt{\frac{ab}{c}} < \sqrt{\frac{ac}{b}} + \sqrt{\frac{bc}{a}},$$

vagy $\sqrt{abc}$-vel mindkét oldalt leosztva $1/c < 1/a + 1/b$, akkor K és L is eshet a metszéspontba, tehát a KL távolság minimuma 0, és (2) alapján az $a\cos x + b\cos y + c\cos z$ maximuma

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{c} + \frac{bc}{a}\right).$$

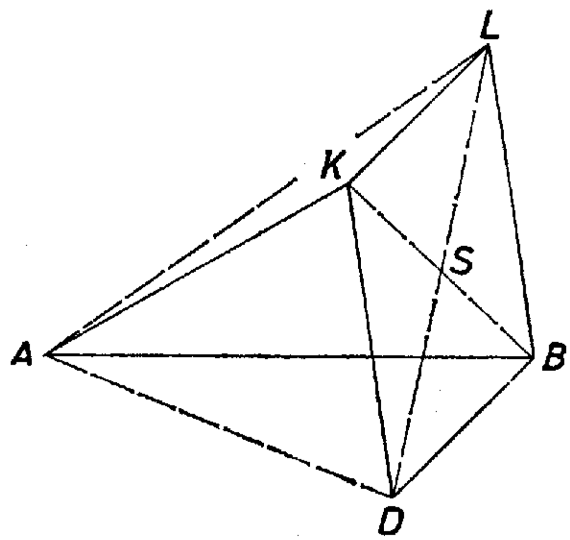
Ha viszont (3) nem teljesül, akkor a K és L pontok távolsága mindig több, mint $\sqrt{\dfrac{ab}{c}} - \sqrt{\dfrac{ac}{b}} - \sqrt{\dfrac{bc}{a}}$, azaz $a\cos x + b\cos y + c\cos z$ mindig több, mint

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} - \left(\sqrt{\frac{ab}{c}} - \sqrt{\frac{ac}{b}} - \sqrt{\frac{bc}{a}}\right)^2\right) = a + b - c,$$

de ezt az értéket akármennyire megközelítheti.

Weisz Ferenc (Mohács, Kisfaludy K. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Az (1) összefüggést vektorokra való hivatkozás nélkül is megkaphatjuk. Legyen D az a pont, amelyre $KLBD$ paralelogramma.



2. ábra

Ekkor, a cosinustétel alapján (2. ábra)

$$2KA \cdot AB \cdot \cos x = KA^2 + AB^2 - KB^2,$$

$$2AB \cdot BL \cdot \cos y = AB^2 + BL^2 - AL^2,$$

$$2BL \cdot KA \cos z = 2DK \cdot KA \cdot \cos z = DK^2 + KA^2 - AD^2,$$

Így (1) igazolásához azt kell megmutatnunk, hogy

$$KL^2 = KB^2 + AL^2 + AD^2 - (AB^2 + KA^2 + BL^2). \tag{4}$$

Jelöljük S-sel a $KLBD$ paralelogramma középpontját. Felhasználva, hogy minden paralelogrammában az oldalak és az átlók négyzetösszege megegyezik, továbbá hogy AS súlyvonal a KAB, valamint LAD háromszögekben, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 4AS^2 =& 2AB^2 + 2AK^2 - KB^2, \\ 4AS^2 =& 2AL^2 + 2AD^2 - LD^2, \\ 2KL^2 + 2BL^2 =& LD^2 + KB^2. \end{aligned}$$

Az első összefüggést a második és harmadik összegéből kivonva éppen (4)-et kapjuk.