

I. megoldás. Ha adott a térben egy P pont és egy P -t nem tartalmazó S sík, a nem S -en levő pontokat két osztályba sorolhatjuk aszerint, hogy P -vel összekötve őket, S -et metsző vagy S -et nem metsző szakaszt kapunk-e. Belátható, hogy a tér S -hez nem tartozó pontjainak ilyen kettévágása nem függ a P pont megválasztásától. A kapott részeket nyílt féltereknek hívjuk, véges sok nyílt félter közös részét pedig konvex poliédernek nevezzük, ha az korlátos és nem üres. (A tér valamely H ponthalmazát korlátosnak mondjuk, ha van a térben olyan P pont, és van olyan A valós szám, hogy H minden pontjának P -től mért távolsága kisebb A -nál.) Legyen K tetszőleges konvex poliéder, és tekintsük a K -t meghatározó síkokat. Ezek mindegyikéből a többiek egy-egy konvex sokszöget metszenek ki, e sokszögeket hívjuk K lapjainak. Lényeges, a konvexitásból következő körülmény, hogy K -nak minden síkon csak egy lapja van, és K két lapjának csak egy közös oldala lehet. Legyen L a K -nak olyan lapja, amelynél több oldala K egyetlen lapjának sincs. Jelöljük n -nel L oldalainak a számát, és tekintsük K L -l szomszédos lapjait. Ezek oldalszáma csak 3 és n közti egész szám lehet, a számuk viszont n , így biztosan van köztük kettő, amelynek egyenlő az oldalszáma.

II. megoldás. Felhasználjuk a konvex poliéderekre vonatkozó, Eulertől származó

$$(1) \quad L + C = +2$$

összefüggést, amelyben L a lapok, C a csúcsok és E az élek számát jelöli. Tegyük képzeletben minden él felezőpontjára két katicabogarat, és indítsuk el az egyiket az él egyik, a másikat az él másik végpontja felé. Mivel minden csúcsba legalább 3 él fut be, ha a bogarakat a csúcsok szerint számoljuk össze, legalább $3C$ -t kapunk, viszont eredetileg 2 bogarunk volt. Emiatt

$$2 \geq 3C,$$

amiből (1) alapján kapjuk, hogy

$$6L + 4 \geq 6L + 6C = 6 + 12,$$

vagyis

$$(2) \quad 6L \geq 2 + 12.$$

Jelöljük az i oldalszámú lapok számát S_i -vel, akkor

$$L = S_3 + S_4 + \dots + S_n,$$

ahol n ismét az oldalak maximális számát jelöli, és

$$2 = 3S_3 + 4S_4 + \dots + nS_n,$$

hiszen az éleket a lapok szerint összeszámolva, minden élt kétszer számolunk. Ezeket (2)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$6 \sum_{i=3}^n S_i \geq \sum_{i=3}^n iS_i + 12.$$

Ha $n > 6$, és az összegezést mindkét oldalon csak 6-ig végezzük el, a jobb oldalt csökkentjük többel, tehát

$$6 \sum_{i=3}^6 S_i \geq \sum_{i=3}^6 iS_i + 12.$$

Ebből végül is azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=3}^6 (6-i)S_i = 3S_3 + 2S_4 + S_5 \geq 12,$$

tehát már S_3 , S_4 , S_5 között is biztosan található egynél nagyobb, hiszen ha $S_3 \leq 1$, $S_4 \leq 1$, $S_5 \leq 1$, akkor

$$3S_3 + 2S_4 + S_5 \leq 6.$$

Megjegyzés. Az (1) összefüggés nemcsak konvex poliéderekre igaz, hanem mindazokra a véges sok síklappal határolt testekre, amelyek ún. folytonos deformációval gömbbé alakíthatóak. Ilyen például, az ábrán látható test, amelynek érdekessége, hogy az alaplapjának több oldala van, mint ahány lapja egyáltalán a testnek van.

