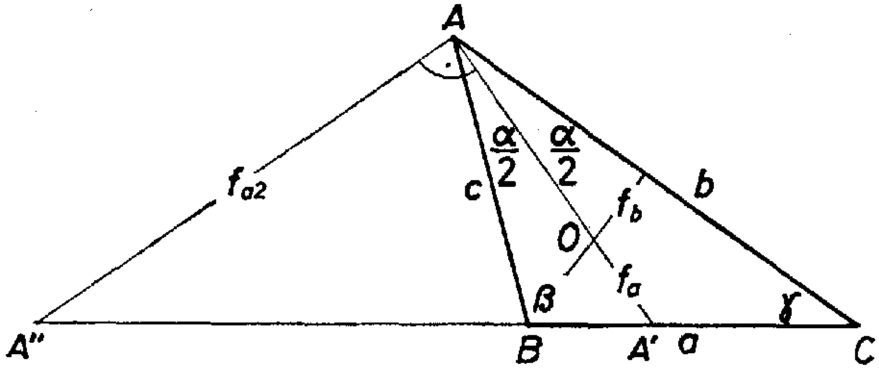
I. megoldás. Jelöljük az ABC háromszög egymás utáni oldalaihoz tartozó szögfelező hosszát $AA' = f_a$-val, f_b-vel, f_c-vel. Az f_a két oldalán létrejött $AA'B$ és $AA'C$ háromszögek egy oldala közös, és A-nál levő szögük egyenlő. Ezekből ajánlkozik: f_a-ra abból írjunk fel egyenletet, hogy a részháromszögek területeinek összege egyenlő az eredeti háromszög területével (1. ábra):



1. ábra

$$\frac{c+b}{2} f_a \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{bc}{2}\sin\alpha.$$

Innen a $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ azonosság felhasználásával

$$f_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2},$$

eszerint azon múlik az állítás helyessége, hogy az adott háromszögben a félszögek cosinusai racionális számok-e vagy nem.

Mármost egy trigonometriai azonosság és a cosinustétel felhasználásával (és mert $\alpha/2$ hegyesszög):

$$\cos\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = +\sqrt{\frac{2bc+(b^2+c^2-a^2)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}} =$$
$$= \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}} = \sqrt{\frac{378\cdot 210}{4\cdot 5^3\cdot 13^2}} = \frac{3\cdot 21}{5\cdot 13}(<1),$$

és ez racionális szám. Hasonlóan

$$\cos\frac{\beta}{2} = \frac{3\cdot 2^2}{13}(<1) \qquad \text{és} \qquad \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{3}{5}(<1)$$

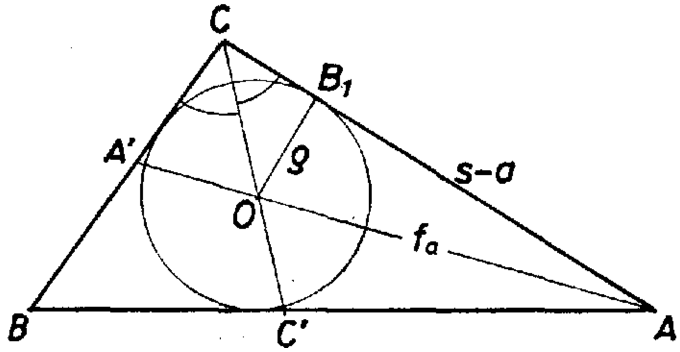
racionálisak. Ezzel bebizonyítottuk a feladat állítását.

II. megoldás. Legyen a beírt kör középpontja O, sugara ϱ, a háromszög területe t, kerülete $2s$. Az $AA'C$ háromszögben CO felezi a C-nél levő szöget, ezért a szögfelező felosztási arányára ismert tétel szerint

$$AO = \frac{CA}{CA+CA'}\cdot AA' = \frac{b}{b+\frac{b}{b+c}\cdot a} f_a \left(= \frac{b+c}{b+c+a} f_a \right),$$

tehát f_a – számadataink mellett – akkor és csak akkor racionális, ha AO mértékszáma racionális.

AO az $OB_1 = \varrho$ és $AB_1 = s - a = \dfrac{b+c-a}{2}$ befogókkal meghatározott derékszögű háromszög átfogója.



2. ábra

A Herón-féle területképlet felhasználásával

$$\varrho = \frac{t}{s} = \frac{1}{s}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{\frac{105\cdot 64\cdot 20}{189}} = \sqrt{\frac{100\cdot 64}{9}} = \frac{80}{3},$$

és Pitagorasz tétele alapján

$$AO = \sqrt{\left(\frac{80}{3}\right)^2 + 105^2} = \frac{325}{3}.$$

Ugyanígy

$$BO = \frac{208}{3} \qquad \text{és} \qquad CO = \frac{100}{3},$$

ezek szerint f_a, valamint f_b és f_c mértékszáma is racionális, amint a feladat állítja.

Megjegyzések. 1. A feladat kitűzésére az adott indítékot, hogy *dr. Kelemen József*, a miskolci műegyetem adjunktusa cikket tett közzé „A matematika tanítása” című tanári folyóirat XXVIII. évfolyamának 1. számában (1981. február) az olyan háromszögekről, amelyeknek oldalai és szögfelezői racionális számok. Tétele: egy háromszögnek akkor és csak akkor racionálisak az oldalai és a szögfelezői, ha az oldalak előállíthatók a következő alakban:

$$\begin{aligned} a &= r(p-q)(1+pq)\big((1+pq)^2-(p-q)^2\big),\\ b &= rq(1-q^2)(1+p^2)^2,\\ c &= rp(1-p^2)(1+q^2)^2, \end{aligned}$$

ahol p, q és r pozitív racionális számok és $q<p<1$. Példánkban a paraméterek $p=2/3$ és $q=1/2$ voltak, és $r=216$ mellett az oldalak mértékszámai egészek lettek.

A cikkben a következő összefüggés is megtalálható:

$$t = \frac{(a+b)(a+c)(b+c)f_af_bf_c}{8abcs}.$$

A paraméterek jelentése

$$p = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{4}, \qquad q = \operatorname{tg}\frac{\beta}{4}.$$

Ezekből következik, hogy $(\alpha+\beta)/2$-nek és $\beta/2$-nek mindegyik szögfüggvénye racionális, tehát $\alpha/2$-nek is, $\gamma/2$-nek is, hiszen — mint ismeretes, $\operatorname{tg} x/2 = u$ jelöléssel

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \qquad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \qquad \operatorname{tg} x = \frac{2u}{1-u^2},$$

(az utóbbi csak akkor, ha $u \neq \pm 1$).

A háromszög eredeti szögeinek szögfüggvényei már

$$\sin\alpha = \frac{2t}{bc}, \qquad \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};$$

alapján is racionálisak (ha $\cos\alpha \neq 0$).

Ezek alapján az $AA'' = f_{a2}$ külső szögfelező is racionális, mert $AA''C - AA''B = ABC$, $f_{a2} = \dfrac{2bc}{b-c}\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

2. Mindezek szerint a vizsgált háromszög-osztály különleges részét alkotja a Herón-háromszögek osztályának, amelynek jellemzése: a, b, c és t racionális. Ezekből $\operatorname{tg}\alpha/2$, $\operatorname{tg}\beta/2$, $\operatorname{tg}\gamma/2$ is racionális, de pl. $\sin\alpha/2$, $\cos\alpha/2$ magában általában nem. (A vizsgált osztály háromszögeit mindegyik szögfelező két heróni részháromszögre osztja.)