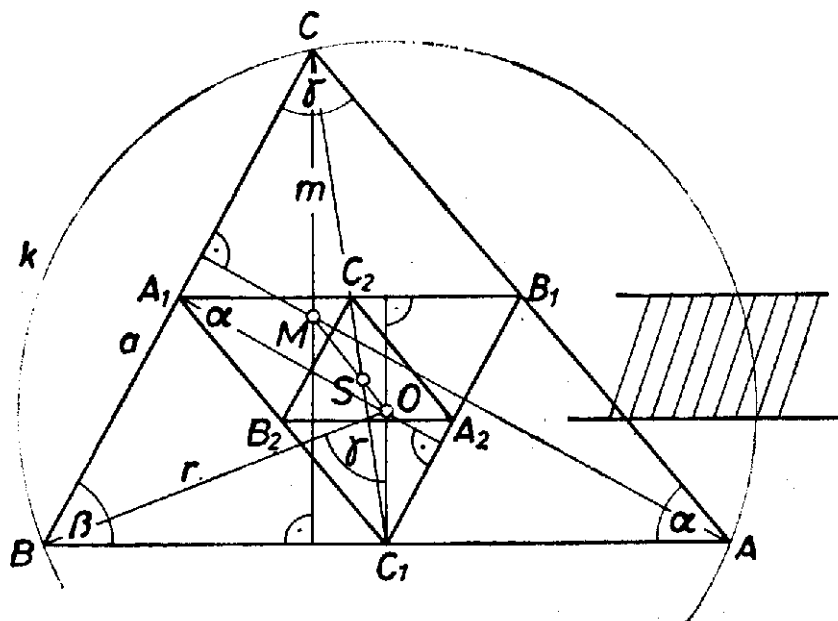


I. Abból a követelményből, hogy az ABC háromszög M magasságpontja belső pont legyen az $A_1B_1C_1$ középháromszögben, korlátozást kapunk a szögek nagyságára. Állapodjunk meg úgy a jelölésekben, hogy a szögek kölcsönös nagyságviszonyára teljesüljön

$$(1) \quad \gamma \geq \beta \geq \alpha.$$

A követelményt átfogalmazzuk a háromszög körülírt köre O középpontjának bevonásával. Felhasználjuk, hogy az Euler–egyenes szerint O az M -nek $(-1/2)$ arányban kicsinyített képe az S súlypontra mint centrumra nézve, másrészt, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög ugyanígy keletkezik az ABC háromszögből. Vagyis hogy O az $A_1B_1C_1$ háromszög magasságpontja. Eszerint O -nak benne kell lennie az $A_1B_1C_1$ háromszöghöz tartozó $A_2B_2C_2$ középháromszögben – ami pedig az ABC háromszögnek $1/4$ arányú kicsinyített képe. Ez azt is jelenti, hogy O az ABC háromszögben is benne van, vagyis csak hegyesszögű háromszögekről lehet szó, $\gamma < 90^\circ$.



Megvizsgáljuk annak feltételét, hogy O az A_2B_2 és A_1B_1 egyenesek közti sáv belsejében legyen. Szükséges, hogy O -nak AB fölötti magasságára teljesüljön $OC_1 > m/4$, azaz

$$m < 4 \cdot OC_1 = 4r \cos \gamma,$$

ahol m az AB oldalhoz tartozó magasság és r a körülírt kör sugara. Ekkor

$$m = \alpha \sin \beta = 2r \sin \alpha \sin \beta = r(\cos(\beta - \alpha) - \cos(\beta + \alpha)) = r(\cos(\beta - \alpha) + \cos \gamma),$$

és ezt beírva, kellő átrendezés után

$$(2) \quad \begin{aligned} \cos(\beta - \alpha) &< 3 \cos \gamma \\ \beta - \alpha &> \arccos(3 \cos \gamma). \end{aligned}$$

(A jobb oldal tulajdonképpen radiánban értendő, de fokra átszámítva fogjuk felhasználni.)

Másrészt O nem eshet az A_1B_1 középvonal egyenesére fölé, hiszen akkor M az AB egyenes alá esne, a háromszögön kívülre és a háromszög csak tompaszögű lehetne.

Eddig nem használtuk fel, hogy γ a háromszög legnagyobb szöge; tehát meggondolásunk az $A_2B_2C_2$ háromszög mindegyik oldalára biztosítja, hogy O benne legyen az illető sávban, akkor pedig magában az $A_2B_2C_2$ háromszögben is benne lesz.

II. Mostantól azt is figyelembe vesszük, hogy az α, β, γ mértékszámok egész számok.

A (2) egyenlőtlenség csak akkor jelent valódi korlátozást, ha $3 \cos \gamma < 1$, azaz $\gamma > 70,53^\circ$.

$$\gamma = 71^\circ \text{ mellett } \beta - \alpha > 12,4^\circ, \text{ azaz } \beta - \alpha \geq 13^\circ \text{ és } \beta + \gamma = 109^\circ;$$

innen $\beta \geq 61^\circ$ és $\beta \leq \gamma$ figyelembevételével β -ra 11 értéket kapunk ($\beta = 61^\circ, 62^\circ, \dots, 71^\circ$), egyben 11 háromszög-alakot. A folytatást táblázatosan közöljük.

$\gamma =$	$\beta - \alpha >$	$\beta - \alpha \geq$	$\beta - \alpha =$	$\beta =$	alakok száma
72°	$22^\circ, 02$	23°	108°	$66^\circ, 67^\circ, \dots, 72^\circ$	7
73°	$28^\circ, 70$	29°	107°	$68^\circ, 69^\circ, \dots, 73^\circ$	6
74°	$34^\circ, 21$	35°	106°	$71^\circ, \dots, 74^\circ$	4
75°	$39^\circ, 06$	40°	105°	$73^\circ, \dots, 75^\circ$	3
76°	$43^\circ, 46$	44°	104°	$74^\circ, \dots, 76^\circ$	3
77°	$47^\circ, 55$	48°	103°	$76^\circ, 77^\circ$	2
78°	$51^\circ, 41$	52°	102°	$77^\circ, 78^\circ$	2
79°	$55^\circ, 08$	56°	101°	79°	1

A $\gamma = 80^\circ, 81^\circ, \dots, 89^\circ$ értékekre $3 \cos \gamma$ tovább is monoton csökken, ezért $\beta - \alpha$ alsó korlátja tovább monoton nő, emiatt már mindig csak $\beta = \gamma$ lehetséges. Ebből a vizsgálatból $11+28+10=49$ megfelelő háromszögalakot kaptunk.

A hátralevő $60^\circ \leq \gamma \leq 70^\circ$ esetekben α legkisebb értéke $180^\circ - 2\gamma$, legnagyobb értéke $\left\lceil \frac{180^\circ - \gamma}{2} \right\rceil$, hiszen $\alpha \leq \beta$; ezek szerint megválasztott γ mellett α lehetséges értékeinek, egyben a háromszög alakoknak a száma:

$$\left\lceil 90 - \frac{\gamma}{2} \right\rceil - (179 - 2\gamma) = \gamma + \left\lceil \frac{\gamma}{2} \right\rceil - 89.$$

hiszen minden közbeeső egész szám lehet α értéke.

Ezek összege, a páros és páratlan eseteket különválasztva $(1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16) + (2 + 5 + 8 + 11 + 14) = 3 \cdot 17 + 5 \cdot 8 = 91$.

Mindezek szerint a kérdéses háromszög alakok száma 140.

Megjegyzés. Többen a legkisebb szög értéke szerint fogták egy-egy csoportba az alakokat, ami 60 vizsgálatot jelentett, méghozzá az $\alpha = 1^\circ, 3^\circ, 5^\circ, \dots, 21^\circ, 23^\circ$ csoportokban nincs is megfelelő alak.