Jelöljük a bal oldal értékét b_n-nel, a jobb oldalét pedig j_n-nel: Mivel $b_1 = 2 = j_1$, elegendő megmutatnunk, hogy $j_k - j_{k-1} = b_k - b_{k-1}$. Valóban, ha ezt már tudjuk, akkor

$$\begin{aligned} b_n &= (b_n - b_{n-1}) + (b_{n-1} - b_{n-2}) + \ldots + (b_2 - b_1) + b_1 = \\ &= (j_n - j_{n-1}) + (j_{n-1} - j_{n-2}) + \ldots + (j_2 - j_1) + j_1 = j_n. \end{aligned}$$

Világos, hogy $j_k - j_{k-1} = k^5 + k^7$. Másrészt $1 + 2 + \ldots + k = k(k+1)/2$ alapján

$$b_k - b_{k-1} = 2\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{(k-1)k}{2}\right)^4 = \frac{k^4}{8}\big((k+1)^4 - (k-1)^4\big).$$

Használjuk most fel az $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)$ azonosságot:

$$b_k - b_{k-1} = \frac{k^4}{8} \cdot 2 \cdot 2k \cdot (2k^2 + 2) = k^5(k^2+1) = k^5 + k^7 = j_k - k_{k-1},$$

és ezt akartuk bizonyítani.

Megjegyzés. Igazolható, hogy

$$1^5 + 2^5 + \ldots + n^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12},$$

valamint

$$1^7 + 2^7 + \ldots + n^7 = \frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24}.$$

Ezek alapján a bizonyítandó állítás azonnal adódik.