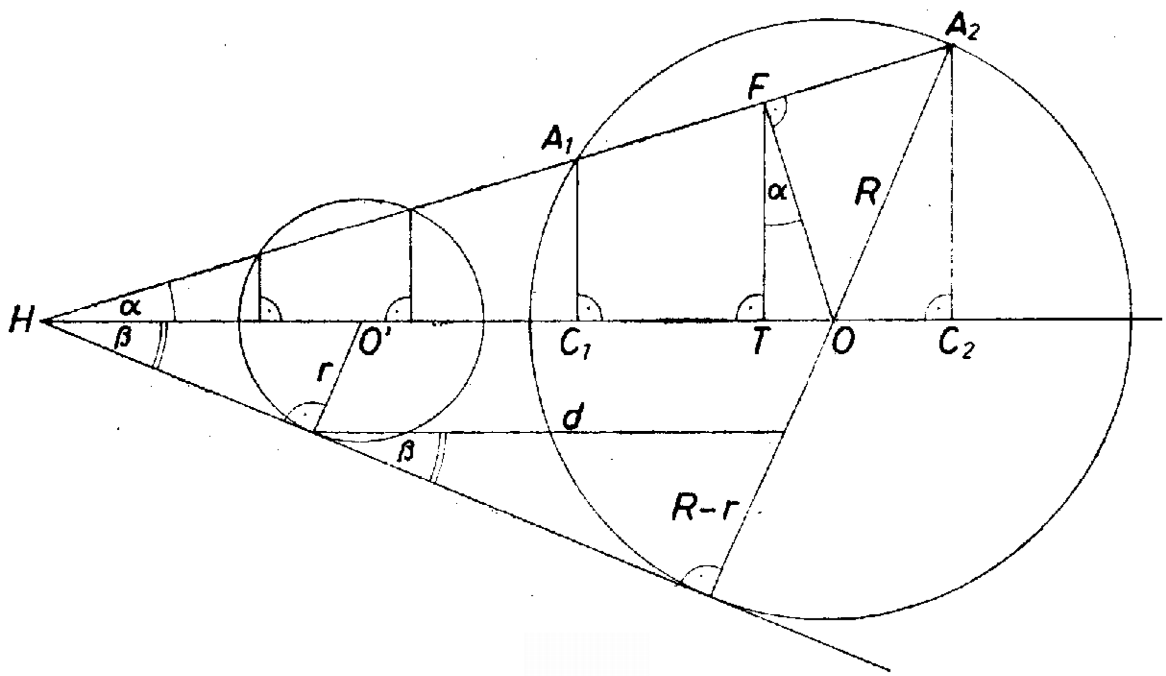
Feltehetjük, hogy $R > r$. Jelöljük a körök külső hasonlósági pontját H-val, a nagyobb kör középpontját O-val, a kisebbét O'-vel, a szelő és az OH egyenes hajlásszögét α-val (1 ábra).



1. ábra

A szóban forgó két csonkakúp-palást hasonló (H középpontú nyújtással egymásba átvihetők), az egymásnak megfelelő lineáris méretek aránya megegyezik a körök sugarainak arányával, felszíneik aránya pedig e sugarak négyzeteinek arányával. Ha a nagyobb csonkakúp-palást felszíne P, akkor a kisebbé $\frac{r^2}{R^2}P$, különbségük pedig $\frac{R^2-r^2}{R^2}P$. Látható, hogy ez akkor a legnagyobb, amikor P maga is a lehető legnagyobb. $\left(\frac{R^2-r^2}{R^2} > 0,\ \text{állandó}\right)$.

Fejezzük ki P-t α függvényeként. Legyenek a szelőnek az R sugarú körrel alkotott metszéspontjai A_1, A_2, ezekből az OH egyenesre bocsátott merőlegesek talppontjai C_1, C_2. A csonkakúp-palást felszínének ismert képlete szerint

$$P = \pi(A_1C_1 + A_2C_2)A_1A_2.$$

Legyen még az O-ból a szelőre bocsátott merőleges talppontja (egyben az A_1A_2 húr felezőpontja) F, F-ből az OH egyenesre bocsátott merőleges talppontja pedig T.

FT az $A_1C_1C_2A_2$ derékszögű trapéz középvonala, így

$$A_1C_1 + A_2C_2 = 2FT.$$

$OFT\sphericalangle = \alpha$, mivel merőleges szárú szögek, és mindkettő hegyesszög. Az OFT derékszögű háromszögben tehát

$$FT = OF \cdot \cos\alpha.$$

Másrészt az OHF derékszögű háromszögben

$$OF = OH \cdot \sin\alpha,$$

továbbá a körök hasonlósága alapján

$$\frac{OH-d}{OH} = \frac{r}{R};$$

ahonnan

$$OH = \frac{dR}{R-r}.$$

Ezek szerint

$$FT = \frac{dR}{R-r}\sin\alpha\cos\alpha.$$

Az OA_2F derékszögű háromszögben

$$A_2F = \sqrt{R^2 - OF^2} = \sqrt{R^2 - \frac{d^2R^2}{(R-r)^2}\sin^2\alpha}.$$

Az A_1A_2 húr ennek kétszerese.

A kapott összefüggések alapján a palástfelszín:

$$P=4\pi\frac{d^2R^2}{(R-r)^2}\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{\left(\frac{R-r}{d}\right)^2-\sin^2\alpha}.$$

Mivel $P\geqq 0$, ezért P ugyanakkor maximális, amikor négyzetének pozitív konstans szorosa maximális. Elég tehát a

$$\sin^2\alpha\cos^2\alpha\left[\left(\frac{R-r}{d}\right)^2-\sin^2\alpha\right]$$

kifejezést vizsgálnunk, amely a $\sin^2\alpha=x$ és $\left(\frac{R-r}{d}\right)^2=a$ jelöléssel a következő alakot ölti:

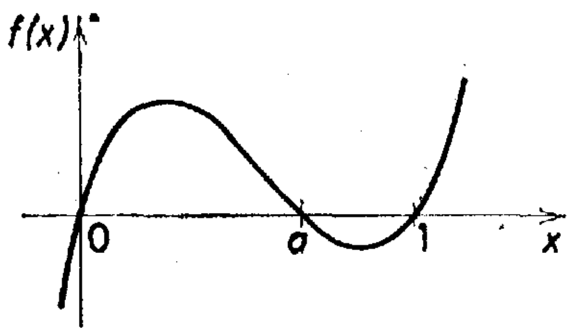
$$x(1-x)(a-x)=x^3-(a+1)x^2+ax.$$

Az 1. ábráról leolvasható az a fontos észrevétel, hogy $\frac{R-r}{d}=\sin\beta$ ahol β a körök közös külső érintőinek az OH egyenessel alkotott hajlásszöge.

Hagyjuk most egy pillanatra figyelmen kívül x és a jelentését, és tekintsük a valós számokon értelmezett

$$f(x)=x^3-(a+1)x^2+ax$$

függvényt, ahol a 1-nél kisebb pozitív állandó. E függvénynek 3 valós zérus helye van, növekedő rendben: $x_1=0$, $x_2=a$, $x_3=1$. És mivel x^3 együtthatója pozitív, ezért a függvény grafikonjának jellege a 2. ábra szerinti.



2. ábra

Mivel azonban feladatunkban $x=\sin^2\alpha$ és $a=\sin^2\beta$ továbbá $0\leqq\alpha\leqq\beta$, azért e grafikonnak csak a 0 és a közé eső darabja ír le valóságos palástfelszín változást.

A felvetett kérdésre közel a válasz. Az $f(x)$ függvény deriváltjának 0 és a közé eső zérushelyét kell megkeresnünk, abból $x=\sin^2\alpha$ alapján a keresett szög meghatározható.

$$f'(x)=3x^2-2(a+1)x+a,$$

zérushelyei

$$x_1=\frac{a+1-\sqrt{a^2-a+1}}{3}\quad\text{és}\quad x_2=\frac{a+1+\sqrt{a^2-a+1}}{3}.$$

Megmutatjuk, hogy $0<x_1<a$, és hogy $x_2>a$. Az első állításhoz két irányból adunk becslést a gyökös kifejezésre: egyrészt $\sqrt{a^2-a+1}<\sqrt{a^2+2a+1}=a+1$,
másrészt $\sqrt{a^2-a+1}=\sqrt{(1-a)^2+a}>1-a(>0)$.

A másodikhoz pedig

$$x_2>\frac{a+a+\sqrt{(1-a)^2+a}}{3}>\frac{2a+\sqrt{a}}{3}>a,$$

hiszen $1>a$. Ezek szerint x_1 az a hely, amit keresünk.

Mindezek alapján a keresett szög:

$$x_0=\operatorname{Arc\,sin}\sqrt{\frac{\left(\frac{R-r}{d}\right)^2+1-\sqrt{\left(\frac{R-r}{d}\right)^4-\left(\frac{R-r}{d}\right)^2+1}}{3}}.$$

Arc sin y (olvasd: arkusz szinusz főérték y) azt a (radiánban mért) a szöget jelenti, amelyre $\sin\alpha=y$ és $-\frac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2}$.

(L. L.)

Károlyi Gyula (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)