A háromszögben szokásos jelölésekkel

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(a^2+b^2+c^2)-2a^2}{2bc} = \frac{a(a^2+b^2+c^2)}{2abc} - \frac{a^3}{abc}.$$

A $\cos\beta$-ra és $\cos\gamma$-ra fölírt hasonló kifejezésekkel

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{2abc} - \frac{(a^3+b^3+c^3)}{abc}. \tag{1}$$

A jobb oldalon az a, b, c oldalaknak ún. szimmetrikus kifejezéseit látjuk. (Szimmetrikusnak mondunk egy kifejezést, ha a benne szereplő változók sorrendjét tetszés szerint megváltoztatva, a kifejezés változatlan marad.)

Mivel a, b és c az adott egyenlet gyökei, behelyettesítésükkel teljesülnek:

$$\begin{aligned} a^3 - pa^2 + qa - r &= 0, \\ b^3 - pb^2 - qb - r &= 0, \\ c^3 - pc^2 + qc - r &= 0, \end{aligned}$$

tehát összeadással, átrendezéssel

$$a^3+b^3+c^3 = p(a^2+b^2+c^2) - q(a+b+c) + 3r. \tag{2}$$

Másrészt azt is tudjuk, hogy egyetlen olyan harmadfokú egyenlet van, amelynek az a, b, c számok a gyökei és a harmadfokú tag együtthatója $(+1)$, éspedig a következő:

$$(x-a)(x-b)(x-c) = 0,$$

kifejtve

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc = 0.$$

Eszerint a föltevéssel ekvivalens, hogy

$$\begin{aligned} a+b+c &= p, \\ abc &= r, \\ ab+ac+bc &= q, \end{aligned}$$

így pedig

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) = p^2 - 2q,$$

továbbá (2)-ből

$$a^3+b^3+c^3 = p(p^2-2q) - qp + 3r = p^3 - 3pq + 3r.$$

Mindezek alapján (1) jobb oldala az egyenlet együtthatóival így alakul:

$$\frac{p(p^2-2q)}{2r} - \frac{p^3-3pq+3r}{r} = \frac{-p^3+4pq-6r}{2r},$$

amint azt a feladat állítja.