

Két egy síkba eső egyenes csak akkor nem metszi egymást, ha párhuzamosak. Képzeljük el, hogy 17 egyenest felvettünk a síkon. Osszuk őket osztályokba, egy osztályba kerüljenek az egymással párhuzamos egyenesek. Tegyük fel, hogy s osztályunk van, az elsőbe k_1, \dots , az utolsóba k_s egyenes került. Nyilván k_1, \dots, k_s pozitív egészek és

$$k_1 + k_2 + \dots + k_s = 17.$$

Akárhogyan adunk meg ezeknek a feltételeknek megfelelő k_i számokat, mindig találunk a síkon 17 egyenest úgy, hogy semelyik három ne menjen át egy ponton, és éppen s osztály legyen, s az osztályokban k_1, k_2, \dots, k_s egyenes.

Állítjuk, hogy a metszéspontok száma csak a k_1, \dots, k_s számoktól függ, az egyenesek konkrét elhelyezkedésétől nem. Valóban, vegyünk egy i -edik osztályba eső egyenest. Ezen összesen $17 - k_i$ metszéspont található, mert minden más osztályba eső egyenes – és csak az – metszi, és ezek a metszéspontok különbözők. Így a metszéspontok száma a

$$\begin{aligned} & (17 - k_1)k_1 + (17 - k_2)k_2 + \dots + (17 - k_s)k_s = \\ & = 17(k_1 + k_2 + \dots + k_s) - (k_1^2 + \dots + k_s^2) = \\ & = 17^2 - (k_1^2 + \dots + k_s^2), \end{aligned}$$

összeg fele, mert minden metszésponton két egyenes megy át, tehát a metszéspontokat kétszer vettük számításba. 101 metszéspontra van szükségünk, tehát akkor és csak akkor léteznek a kérdéses egyenesek, ha vannak olyan pozitív k_1, k_2, \dots, k_s egészek, melyekre

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + \dots + k_s &= 17 \\ k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_s^2 &= 17^2 - 202 = 87 \end{aligned}$$

egyszerre teljesül.

Rövid próbálgatás után kapjuk, hogy $s = 6, k_1 = 8, k_2 = 4, k_3 = 2, k_4 = k_5 = k_6 = 1$ megoldás. Így meg lehet adni a feltételeknek megfelelő egyeneseket.

Megjegyzés. Nem nehéz belátni, hogy a fenti egyenletrendszernek csak a következő $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_s$ feltételeket kielégítő megoldásai vannak:

$$\begin{array}{ll} 8, 4, 2, 1, 1, 1 & (s=6) \\ 8, 3, 3, 2, 1 & (s=5) \\ 7, 5, 3, 2 & (s=4) \\ 6, 5, 5, 1 & (s=4). \end{array}$$