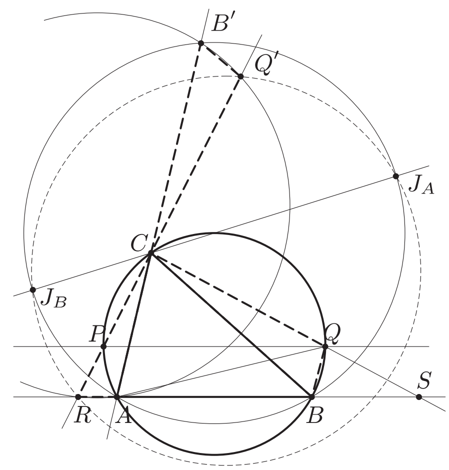
A 2012. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldása

1. *Az ABC háromszög A-val, illetve B-vel szemközti hozzáírt köreinek középpontjait jelölje J_A, illetve J_B. Húzzuk meg a körülírt kör egy olyan PQ húrját, amely párhuzamos az AB oldallal, továbbá metszi az AC és BC oldalszakaszokat. Az AB és CP egyenesek metszéspontja legyen R. Bizonyítsuk be, hogy*

$$J_AQJ_B\sphericalangle + J_ARJ_B\sphericalangle = 180^\circ.$$

Megoldás (Gyarmati Máté megoldása alapján).

A $BCQ\sphericalangle$ és $BAQ\sphericalangle$ azonos íven nyugvó kerületi szögek, $BAQ\sphericalangle$ és $PQA\sphericalangle$ váltószögek, valamint $PQA\sphericalangle$ és $PCA\sphericalangle$ szintén azonos íven nyugvó kerületi szögek.



Innen

$$BCQ\sphericalangle = BAQ\sphericalangle = PQA\sphericalangle = PCA\sphericalangle$$

adódik. Ezen kívül $RAC\sphericalangle = BQC\sphericalangle$, hiszen $ABQC$ húrnégyszög. Tehát $RAC\triangle \sim BQC\triangle$, hisz két-két szögük egyforma, így $CRA\sphericalangle = CBQ\sphericalangle$ is teljesül.

Legyenek B' és Q' rendre a B, illetve Q pontok tükörképei a J_AJ_B egyenesre. Világos, hogy

$$J_BAJ_A\sphericalangle = J_BAC\sphericalangle + CAJ_A\sphericalangle = \frac{1}{2}(RAC\sphericalangle + CAB\sphericalangle) = \frac{1}{2}\cdot 180^\circ = 90^\circ$$

és hasonlóan

$$J_BBJ_A\sphericalangle = J_BBC\sphericalangle + CBJ_A\sphericalangle = \frac{1}{2}(ABC\sphericalangle + CBS\sphericalangle) = \frac{1}{2}\cdot 180^\circ = 90^\circ,$$

ahol S a CQ és AB metszéspontja. A tükrözés miatt tehát J_A, A, B, J_B és B' egy körön (J_AJ_B Thalesz-körén) vannak. Ezen kívül J_B és J_A egyaránt rajta vannak az ABC háromszög C-nél lévő külső szögfelezőjén, ezért a B csúcs B' tükörképe az AC egyenesre illeszkedik. Korábban láttuk, illetve a tükrözés miatt $RCA\sphericalangle = QCB\sphericalangle = Q'CB'\sphericalangle$, így R, C és Q' is egy egyenesre esnek. Ezek szerint

$$RAB'\sphericalangle = RAC\sphericalangle = BQC\sphericalangle = B'Q'C\sphericalangle = B'Q'R\sphericalangle,$$

tehát az R, A, Q' és B' pontok is húrnégyszöget alkotnak.

A J_BABB' és $RAQ'B'$ körök hatványvonala AB', a J_BABB' és J_BRJ_A körök hatványvonala pedig J_AJ_B. E három kör hatványpontja pedig a két hatványvonal metszéspontja, C. Tehát a C pont hatványa az $RAQ'B'$ körre $|\overline{CR}|\cdot|\overline{CQ'}|$, és ez megegyezik a J_ARJ_B körre vett hatvánnyal. Mivel R az utóbbi körön fekszik, Q'-nek is illeszkednie kell e körre, tehát J_ARJ_BQ' húrnégyszög. Innen

$$180^\circ = J_ARJ_B\sphericalangle + J_AQ'J_B\sphericalangle = J_ARJ_B\sphericalangle + J_AQJ_B\sphericalangle,$$

és nekünk pontosan ezt kellett igazolnunk.

Megjegyzés. A feladat állítása akkor is teljesül, ha a PQ húrról nem tesszük fel, hogy metszi az AC és BC oldalszakaszokat. Ez az általánosítás több, egymástól lényegesen nem különböző eset gondos vizsgálatával a fentiekhez hasonlóan igazolható. A bizottság nem kívánta ezzel terhelni a versenyzőket, ezért döntött a speciális eset kitűzése mellett.

2. *Jelölje $E(n)$ az n pozitív egész szám 2-es számrendszerbeli felírásában az 1-esek számát. Nevezzünk egy n pozitív egész számot* érdekesnek, *ha n osztható $E(n)$-nel. Bizonyítsuk be, hogy*

(a) *nem lehet 5 egymás utáni pozitív egész szám mindegyike érdekes, továbbá, hogy*

(b) *végtelen sok olyan n pozitív egész szám van, amelyre az n, $n+1$ és $n+2$ számok mindegyike érdekes.*

Megoldás. (a) Indirekt bizonyítunk: tegyük fel, hogy létezik 5 egymást követő, érdekes pozitív egész szám. Ezen számok közt bizonyosan van két olyan egymást követő szám (mondjuk n és $n+1$), hogy az n szám 2-es számrendszerbeli felírása 01-re végződik: $n = \dots 01_2$. Ekkor az $(n+1) = \dots 10_2$, ezért $E(n) = E(n+1)$. Mivel n és $n+1$ egyaránt érdekesek, $E(n) \mid n$ és $E(n) = E(n+1) \mid n+1$ miatt $E(n) \mid (n+1) - n = 1$ teljesül, tehát $E(n) = 1$. Ezért $n = \dots 01_2$-ből $n = 1$ következik. Ekkor ugyan $n+1 = 2$ még érdekes, de $n+2 = 3$ már nem az, tehát nem létezik 5 egymást követő érdekes pozitív egész szám. (Negatív számokat is megengedve létezik öt egymást követő érdekes szám: -2, -1, 0, 1, 2.) Egyúttal azt is igazoltuk, hogy ha az n, $n+1$, $n+2$ és $n+3$ pozitív egészek mindegyike érdekes, akkor az $n = \dots 10_2$.

(b) A fenti bizonyításból kitűnik, hogy ha olyan n-t keresünk, amire az n, $n+1$ és $n+2$ számok mindegyike érdekes, akkor $n+2 = \dots 00_2$ vagy $n+2 = \dots 01_2$. Foglalkozzunk azzal az esettel, amikor $n+2 = \dots 00_2$. Sőt: tegyük fel, hogy

$$n + 2 = \dots 10000_2,$$

azaz $n+2$ osztható 16-tal, de 32-vel nem.

Legyen $a := E(n+2)$. Ekkor $n+1 = \dots 01111_2$ és $n = \dots 01110_2$, tehát $E(n+1) = a+3$, $E(n) = a+2$, így $a+2 \mid n$ és $a+3 \mid n+1$, valamint $a \mid n+2$. Ezért olyan (minél kisebb) a-t keresünk, amire az a, $a+2$ és $a+3$ számok közül legfeljebb csak a-nak és $(a+2)$-nek lehet 1-nél nagyobb közös osztója, és az sem lehet több 2-nél. Éppenséggel az $a = 2$ ilyen szám, ahhoz azonban, hogy ez megoldást adjon, az kellene, hogy $a + 2 = 4 \mid n$ teljesüljön, ahol $n+2 = 10\dots010000_2$. Ez pedig lehetetlen, ugyanis $n = \dots 10_2$. Ezért a következő lehetőséggel, $a = 4$-gyel próbálkozunk. Ekkor $n+2 = 2^{t_1} + 2^{t_2} + 2^{t_3} + 2^4$, ahol $t_1 > t_2 > t_3 > 4$. Az n és $n+1$ érdekességéből adódnak a $E(n) = 6 \mid n$ és $E(n+1) = 7 \mid n+1$ feltételek.

Az $x := n + 2 - 16 = n - 14 = 2^{t_1} + 2^{t_2} + 2^{t_3}$ jelölést bevezetve azt kapjuk, hogy $x \equiv 6 \pmod 7$, $x \equiv 4 \pmod 6$ teljesül, és $t_3 > 4$ miatt $x \equiv 0 \pmod{32}$. Ennek a kongruenciarendszernek kell tehát olyan $x = 2^{t_1} + 2^{t_2} + 2^{t_3}$ alakú megoldását keresnünk, amelyre $t_1 > t_2 > t_3 > 4$. Nem nehéz megoldani a szimultán kongruenciarendszert sem (az $x \equiv 4 \pmod 6$ helyett $x \equiv 1 \pmod 3$ kongruenciát használva), de az ujjainkon számolva is célt érünk. A két első kongruencia az $x \equiv 34 \pmod{42}$ kongruenciával ekvivalens. A $t_3 > 4$ feltétel azt jelenti, hogy $2^5 \mid x$, tehát az $x = 34 + 42k$ alakú számok közül csak $160, 160 + 42 \cdot 16 = 832, \dots$ jön szóba. A $160 = 10100000_2$ még nem jó, de a $832 = 1101000000_2$ már igen. Tehát $n + 2 = 2^9 + 2^8 + 2^6 + 2^4 = 848$ és valóban: az $n = 846 = 1101001110_2$ választással $E(846) = 6 \mid 846$, $E(847) = 7 \mid 847$ és $E(848) = 4 \mid 848$.

A most talált érdekes számhármas segítségével pedig úgy kaphatunk végtelen sok megoldást, ha észrevesszük, hogy $3 \mid 2^6 - 1$ és $7 \mid 2^6 - 1$, tehát

$$m(j) = 2^{9+6j} + 2^{8+6j} + 2^{6+6j} + 2^4$$

választással

$$E\big(m(j) - 1\big) = 7 \mid m(j) - 1 = \big(2^{6j} - 1\big) \cdot 832 + 847$$

és

$$E\big(m(j) - 2\big) = 6 \mid m(j) - 2 = \big(2^{6j} - 1\big) \cdot 832 + 846.$$

(Az $E\big(m(j)\big) = 4 \mid m(j)$ pedig nyilván teljesül.)

Megjegyzések. 1. A (b) rész megoldásához nem tartozik hozzá, hogyan is találtuk meg a végtelen sok példát. Természetesen az is teljes értékű megoldás, ha valaki csak az utolsó bekezdésben megadott számhármasokra bizonyítja be, hogy azok érdekes számokból állnak. (Utóbbit nem nehéz megtenni). Természetesen a mintamegoldásban egyúttal azt is jelezni kívántuk, hogyan lehet találni ilyen számhármasokat.

2. A (b) rész megoldásának elején miért csak azt vizsgáltuk, ha $n+2$ bináris alakjában a két utolsó 0 előtt még két 0 áll? Nos azért, mert ha $n + 2 = \dots 100_2$ lenne, akkor $n + 1 = \dots 011_2$ és $n = \dots 010_2$, vagyis $E(n) = E(n+2) \mid (n+2) - n = 2$, tehát $n + 2 = 2^t + 4$ és $3 \mid n + 1 = 2^t + 3$, ami lehetetlen.

Hasonlóan, ha $n + 2 = \dots 1000_2$, akkor $n + 1 = \dots 0111_2$, $n = \dots 0010_2$, így $a = E(m)$ jelöléssel $E(n+1) = a + 2$ és $E(n) = a + 1$-nek adódik, ám ez a mintamegoldásbelinél nagyobb a-ra vezet. (Egyébként van ilyen megoldás is, ezek legkisebbike $n + 2 = 2360 = 2^{11} + 2^8 + 2^5 + 2^4 + 2^3$, ahol tehát $a = 4$ és $6 \mid 2358 = 100100110110_2$, $7 \mid 2359 = 100100110111_2$ és $5 \mid 2360 = 100100111000_2$.)

3. Ha a (b) részben az n-et $n = \dots 11_2$ alakban keresnénk, akkor hasonló gondolatmenettel még kisebb megoldást is találnánk: $n = 623$-ra $7 \mid 623 = 1001101111_2$, $4 \mid 624 = 1001110000_2$ és $5 \mid 625 = 1001110001_2$. Innen pedig $7 \mid 2^{12} - 1$ és $5 \mid 2^{12} - 1$ miatt kapunk végtelen sok $\big(m(j) - 1, m(j), m(j) + 1\big)$ érdekes hármast, ahol $m(j) = 2^{9+12j} + 2^{6+12j} + 2^{5+12j} + 2^4$.

4. A feladat (a) részét kiegészítő természetes kérdés persze úgy hangzik, hogy a pozitív egészek között előfordul-e vajon végtelen sokszor négy egymást követő érdekes szám. A válasz igenlő: a legkisebb ilyen négyes a

$$6 \mid 6222 = 1100001001110_2, \qquad 7 \mid 6223 = 1100001001111_2,$$
$$4 \mid 6224 = 1100001010000_2 \quad \text{és} \quad 5 \mid 6225 = 1100001010000_2.$$

Innen a fentiekhez hasonlóan kaphatunk végtelen sok $m(j) - 2$, $m(j) - 1$, $m(j)$, $m(j) + 1$ érdekes számnégyest, ahol $m(j) = 2^{12+12j} + 2^{11+12j} + 2^{6+12j} + 2^4$. A 6222 szám megtalálása pontosan ugyanolyan lépésekkel történhet, mint a 846 vagy a 623 számoké, csak valamivel több számolást (és így több időt) igényel, további említést érdemlő ötletre azonban nincs szükség. Ez hát a magyarázata annak, hogy a bizottság a feladat (b) részében a természetesen adódónál egy könnyebb kérdést tűzött ki.

5. A (b) részben használt ötletek nélkül is nagyon könnyen látható, hogy végtelen sok olyan n van, amire n és $n+1$ is érdekes. Ugyanis minden $n = 2^t + 4$ jó, ahol $t > 2$ páros, hiszen $E(2^t + 4) = 2 \mid 2^t + 4$ és $E(2^t + 5) = 3 \mid 2^t + 5$. Vannak példák páratlan n-nel is, a legkisebb az $n = 115 = 1110011_2$.

6. Az b alapú számrendszerben a feladatbelihez hasonlóan definiált számokat a szakirodalom b-Niven számokként említi. A 10-Niven számokat röviden Niven-számoknak (vagy Harshad-számoknak) hívják. Helen Grundman publikálta 1994-ben, hogy legfeljebb $2b$ egymást követő b-Niven szám létezhet, és Cai bizonyította 1996-ban, hogy végtelen sokféleképp található 4 egymást követő 2-Niven szám, illetve hogy a 3-Niven számok között is végtelen sok egymást követő hatos lép fel. Tudható még, hogy az egymást követő nem-Niven számok sorozata tetszőlegesen hosszú lehet, illetve hogy hány (10-)Niven szám van x-ig (DeKoninck–Doyon tétele szerint aszimptotikusan $c\dfrac{x}{\log x}$, ahol $c = \dfrac{14}{27}\log 10 \approx 1{,}1939$).

3. *Tekintsünk n eseményt, amelyek mindegyikének valószínűsége $\frac{1}{2}$, továbbá bármelyik kettő együttes bekövetkezésének valószínűsége $\frac{1}{4}$.*

(a) *Igazoljuk, hogy annak a valószínűsége, hogy egyik sem következik be, legfeljebb $\dfrac{1}{n+1}$.*

(b) *Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan n természetes szám létezik, amelyre megadhatók az események oly módon, hogy pontosan $\dfrac{1}{n+1}$ legyen annak a valószínűsége, hogy egyik sem következik be.*

Megoldás. Jelölje ezt az n eseményt $A_1, A_2, \dots, A_n$, ekkor $1 \le i \le n$ esetén $P(A_i) = \frac{1}{2}$, továbbá $1 \le i < j \le n$ esetén $P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{4}$ teljesül. Legyenek $B_1, \dots, B_k$ olyan páronként diszjunkt események, melyek közül alkalmasak uniójaként mindegyik A_i előállítható, és azt is tegyük fel, hogy mindegyik B_j szerepel legalább az egyik A_i előállításában. (Ilyenek például az $A'_1 \cap \ldots \cap A'_n$ alakban előálló események, ahol A'_i vagy az A_i eseményt, vagy annak komplementerét jelöli, és legalább egy i-re $A'_i = A_i$ teljesül.) Definiáljunk minden $1 \le i \le n$ esetén egy $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik})$ vektort, ahol $a_{ij} = 1$, amennyiben B_j szerepel A_i előállításában (vagyis $B_j \subseteq A_i$), különben pedig $a_{ij} = 0$. Legyen $1 \le j \le k$ esetén $P(B_j) = p_j$. Ekkor annak valószínűsége, hogy az $A_1, \dots, A_n$ események közül legalább az egyik bekövetkezik: $p = p_1 + \dots + p_k$.

Tekintsük a következő mennyiséget:

$$S := p_1(a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1})^2 + \dots + p_k(a_{1k} + a_{2k} + \dots + a_{nk})^2.$$

Könnyen meggondolhatjuk, hogy

$$S = P(A_1) + \dots + P(A_n) + 2\sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) = \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{4} = \frac{n(n+1)}{4}.$$

Most a súlyozott számtani és négyzetes közepek közti egyenlőtlenség segítségével alulról becsüljük S értékét:

$$\sqrt{\frac{S}{p}} \ge \frac{p_1(a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1}) + \dots + p_k(a_{1k} + a_{2k} + \dots + a_{nk})}{p} =$$
$$= \frac{P(A_1) + \dots + P(A_n)}{p} = \frac{n}{2p},$$

amiből $\dfrac{n(n+1)}{4} = S \ge \dfrac{n^2}{4p}$, és így $p \ge \dfrac{n}{n+1}$.

Ez azt jelenti, hogy annak a valószínűsége, hogy az $A_1, \dots, A_n$ események közül egyik sem következik be, legfeljebb $\dfrac{1}{n+1}$.

A feladat (b) részének igazolásához legyen $n = 2^t - 1$, ahol t tetszőleges pozitív egész szám. Dobjunk t-szer egy szabályos pénzérmével, és a dobások halmazának tetszőleges nemüres H részhalmazára legyen A_H az az esemény, hogy a H-beli dobások között páratlan sok fej van. Megmutatjuk, hogy ez az n esemény kielégíti a feltételeket. Legyen először H a dobások halmazának egy nemüres részhalmaza, és legyen $h \in H$. Képzeljük úgy, hogy a h dobás történik utoljára. Ha a $H \setminus \{h\}$-beli dobások közül páratlan sok lett fej, akkor $\frac{1}{2}$ valószínűséggel lesz a H-beli dobások közül is páratlan sok fej (ha a h dobás írás), ha pedig a $H \setminus \{h\}$-beli dobások közül páros sok lett fej, akkor szintén $\frac{1}{2}$ valószínűséggel lesz a H-beli dobások között páratlan sok fej (ha a h dobás fej). Ezért $P(A_H) = \frac{1}{2}$. Legyenek most H_1 és H_2 a dobások halmazának különböző nemüres részhalmazai. Feltehetjük, hogy például $H_1 \not\subseteq H_2$, vagyis létezik $h_1 \in H_1 \setminus H_2$. Legyen $h_2 \in H_2$. Képzeljük úgy, hogy a h_1 dobás az utolsó, a h_2 pedig az utolsó előtti. Akármi is a h_1, h_2 előtti dobások eredménye, a h_2 dobás után $\frac{1}{2}$ valószínűséggel lesz a H_2-beli dobások között páratlan sok fej, és a H_2-beli fejek számán a h_1 dobás már nem változtat. A h_1 előtti dobások eredményétől függetlenül, az utolsó, h_1 dobás után pedig $\frac{1}{2}$ valószínűséggel lesz a H_1-beli fejek száma páratlan. Ez azt jelenti, hogy $P(H_1 \cap H_2) = \frac{1}{4}$. Az

A_H események közül akkor nem következik be egyik sem, ha az összes dobás eredménye írás, ennek a valószínűsége pedig $\frac{1}{2^t} = \frac{1}{n+1}$. Ezzel a feladat (b) részét is igazoltuk.

Megjegyzés. Tetszőleges páratlan n-re megadható n olyan esemény, amelyek teljesítik a feladatbeli feltételeket úgy, hogy pontosan $\frac{1}{n+1}$ valószínűséggel nem következik be egyik sem. Legyen ugyanis $n = 2k+1$, és tegyük fel, hogy az eseményeink közül mindig pontosan $k+1$ következik be, ráadásul bárhogyan is választunk ki $k+1$ eseményt, azok együttes bekövetkezésének valószínűsége pontosan $p = \frac{k! \cdot k!}{2 \cdot (2k)!}$. Ekkor az A_i esemény bekövetkezésének a valószínűsége

$$P(A_i) = \binom{2k}{k} \cdot p = \frac{(2k)! \cdot k! \cdot k!}{k! \cdot k! \cdot 2 \cdot (2k)!} = \frac{1}{2},$$

illetve az A_i és A_j események együttes bekövetkezésének valószínűsége $i \neq j$ esetén

$$P(A_i \cap A_j) \binom{2k-1}{k-1} \cdot p = \frac{(2k-1)! \cdot k! \cdot k!}{(k-1)! \cdot k! \cdot 2 \cdot (2k)!} = \frac{k}{2 \cdot 2k} = \frac{1}{4}.$$

Annak a valószínűsége pedig, hogy egyik esemény sem következik be éppen

$$1 - \binom{2k+1}{k+1} \cdot p = 1 - \frac{(2k+1)! \cdot k! \cdot k!}{(k+1)! \cdot k! \cdot 2 \cdot (2k)!} = 1 - \frac{2k+1}{2 \cdot (k+1)} =$$

$$= 1 - \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{n+1}.$$