A 2013. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldása

1. *Legyen a és b két olyan pozitív valós szám, amelyekre $2ab = a - b$ teljesül. Tetszőleges pozitív egész k esetén jelöljük x_k-val, illetve y_k-val az ak-hoz, illetve bk-hoz legközelebbi egész számot; ha egy számhoz két legközelebbi egész szám is van, akkor válasszuk ezek közül a nagyobbikat. Igazoljuk, hogy bármely n pozitív egész szám akkor és csak akkor szerepel az $x_1, x_2, \dots$ sorozatban, ha n legalább háromszor szerepel az $y_1, y_2, \dots$ sorozatban.*

Megoldás. Azt bizonyítjuk, hogy bármely pozitív egész n szám az (y_k) sorozatban pontosan kettővel többször fordul elő, mint az (x_k) sorozatban. A feltétel szerint

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + 2. \tag{1}$$

A sorozatok definícióját terjesszük ki $k = 0$-ra is; legyen $x_0 = y_0 = 0$. Minden nemnegatív egész n-re legyen

$$f(n) = \max\{k \ge 0 \colon x_k \le n\} \quad \text{és} \quad g(n) = \max\{k \ge 0 \colon y_k \le n\}.$$

Mivel

$$x_k \le n \iff ak < n + \frac{1}{2} \iff k < \frac{n+\frac{1}{2}}{a} \iff k \le \left\lceil \frac{n+\frac{1}{2}}{a} \right\rceil - 1,$$

ezért

$$f(n) = \left\lceil \frac{n+\frac{1}{2}}{a} \right\rceil - 1, \quad \text{és hasonlóan} \quad g(n) = \left\lceil \frac{n+\frac{1}{2}}{b} \right\rceil - 1.$$

Az (1) feltételből

$$g(n) = \left\lceil \frac{n+\frac{1}{2}}{b} \right\rceil - 1 = \left\lceil \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{a} + 2\right) \right\rceil - 1 = \left\lceil \frac{n+\frac{1}{2}}{a} + 2n + 1 \right\rceil - 1 =$$
$$= f(n) + 2n + 1.$$

Világos, hogy $n \ge 1$ esetén az n szám az (x_k) sorozatban $f(n) - f(n-1)$, az (y_k) sorozatban pedig $g(n) - g(n-1)$ alkalommal fordul elő. Ezen kívül

$$g(n) - g(n-1) = \big(f(n) + 2n + 1\big) - \big(f(n-1) + 2n - 1\big) = f(n) - f(n-1) + 2,$$

tehát n valóban pontosan kettővel többször fordul elő az (y_k) sorozatban, mint az (x_k)-ban. □

2. *Tegyük fel, hogy a P_1, P_2 és P_3 zárt, konvex sokszöglemezek rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy bárhogyan is választjuk az $A \in P_1$, $B \in P_2$ és $C \in P_3$ pontokat, az ABC háromszög területe legfeljebb egységnyi.*

(a) Bizonyítsuk be, hogy a P_1, P_2 és P_3 sokszöglemezek valamelyikének a területe 4-nél kisebb.

(b) Mutassuk meg, hogy megadhatók P_1, P_2 és P_3 sokszöglemezek a fenti tulajdonsággal úgy, hogy P_1-nek is és P_2-nek is 4-nél nagyobb legyen a területe.

Megoldás. (a) A P_1, P_2 és P_3 sokszögeknek válasszuk ki két csúcsát (X-et és Y-t) úgy, hogy e két csúcs különböző sokszögekhez tartozzék és

$$d := |\overline{XY}|$$

távolságuk maximális legyen. Mivel a három sokszögnek összesen véges sok csúcsa van, ez valóban megtehető. Feltehetjük, hogy $X \in P_1$ és $Y \in P_2$.

Az X és Y választása folytán a P_3 sokszög benne van az X köré rajzolt d sugarú körben és az Y köré rajzolt d sugarú körben is. Mivel P_3 bármely Z pontjára az XYZ háromszög területe legfeljebb egységnyi, ezért a P_3 sokszöglemez része egyúttal annak a sávnak is, amelyet az XY egyenessel párhuzamos, attól $2/d$ távolságra levő egyenesek határolnak.

E megfigyeléseinkből az adódik, hogy a P_3 sokszög benne van abban a T téglalapban, amelynek XY egy középvonala és az XY-ra merőleges oldalának hossza $4/d$. Ráadásul P_3 a T egyetlen csúcsát sem tartalmazhatja a fenti két körön belüli elhelyezkedése folytán, ezért P_3 területe bizonyosan kisebb T területénél, azaz $d \cdot \dfrac{4}{d} = 4$-nél. A feladat (a) részében pedig pontosan ezt kellett igazolnunk.

(b) Legyen H_3 az origót tartalmazó egypontú halmaz, H_1 és H_2 pedig az origó körüli $\sqrt{2}$ sugarú kör. Bárhogyan is választunk egy-egy pontot e halmazokból, azok olyan háromszöget alkotnak, amelynek van két, legfeljebb $\sqrt{2}$ hosszúságú szomszédos oldala, így a területe legfeljebb egységnyi.

A H_1-be, illetve H_2-be írt négyzet átlójának hossza $2\sqrt{2}$, vagyis e négyzet oldalhossza 2, területe pedig 4. Tehát mind H_1, mind H_2 területe határozottan nagyobb 4-nél. Található tehát olyan pozitív ε szám, amelyre az origó középpontú, $\sqrt{2} - \varepsilon$ sugarú kör területe 4-nél nagyobb. Válasszuk ezután a P_1 és P_2 sokszögeket úgy, hogy mindkettő tartalmazza az origó középű $\sqrt{2} - \varepsilon$ kört, de benne legyen az origó középű $\sqrt{2} - \varepsilon/2$ sugarú körben. Legyen P_3 tetszőleges olyan konvex sokszöglemez, amely benne van az origó középű $\varepsilon/2$ sugarú körben. Megmutatjuk, hogy az így választott P_1, P_2 és P_3 konvex sokszöglemezek rendelkeznek a (b) részben előírt tulajdonsággal.

Mivel a sokszöglemezeket úgy választottuk, hogy P_1 és P_2 területe 4-nél nagyobb, ezért mindössze azt kell igazolni, hogy ha $A \in P_1$, $B \in P_2$ és $C \in P_3$, akkor az ABC háromszög területe nem lehet 1-nél nagyobb. Toljuk el az ABC háromszöget úgy, hogy a C csúcs az origóba kerüljön. A konstrukció folytán az A, B és C csúcsok eltoltjai benne lesznek a H_1, H_2, illetve H_3 halmazokban, ezért a fenti megfigyelésünk szerint az eltolt háromszög területe nem nagyobb egynél. Ugyanez igaz tehát magára az ABC háromszögre is, nekünk pedig éppen ezt kellett bizonyítanunk.□

Megjegyzés. A feladatot a bizottság sajnos pontatlanul tűzte ki: lemaradt az a kikötés, hogy a P_1, P_2 és P_3 sokszöglemezek egy síkba esnek. Szerencsére ez nem okozott félreértést, mert minden megoldó élt ezzel a kimondatlan feltevéssel.

3. *Igaz-e, hogy ha $n \geq 2$ egész, és minden $1 \leq i < j \leq n$ párra adott egy l_{ij} nemnegatív valós szám, akkor léteznek olyan $a_1, \ldots, a_n$ nemnegatív valós számok, amelyek összege nem haladja meg az l_{ij} számok összegét, és $|a_i - a_j| \geq l_{ij}$ teljesül minden $1 \leq i < j \leq n$ párra?*

Megoldás. Megmutatjuk, hogy a válasz igenlő. Legyen $l_{ji} = l_{ij}$ minden $1 \leq i < j \leq n$ párra.

Határozzuk meg egyenként a továbbiakban potenciálnak nevezett $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mennyiségeket (nem feltétlenül ebben a sorrendben) a következő szabály szerint. Minden lépésben válasszunk egy olyan i indexet, amelyre az a_i potenciált korábban még nem határoztuk meg, és amelyre azon l_{ki} értékek s összege, amelyekre a_k-t már korábban meghatároztuk, a lehető legkisebb. Az így megválasztott i indexre legyen az a_i potenciál ez a minimális s összeg.

Tegyük fel, hogy az a_i potenciált az a_j potenciál előtt határoztuk meg, továbbá, hogy K az a_i előtt, M pedig az a_i után, de a_j előtt meghatározott a_t potenciálokhoz tartozó t indexek halmaza. Az eljárásból következtében ekkor

$$a_j = \sum_{k \in K} l_{kj} + l_{ij} + \sum_{m \in M} l_{mj} \geq \sum_{k \in K} l_{ki} + l_{ij} + \sum_{m \in M} l_{mj} =$$
$$= a_i + l_{ij} + \sum_{m \in M} l_{mj} \geq a_i + l_{ij},$$

tehát $|a_i - a_j| \geq l_{ij}$ valóban teljesül minden $i \neq j$ párra.

Az indoklás befejezéséhez pedig mindössze annyit kell megfigyelnünk, hogy

$$S := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

éppen az l_{ij} $(1 \leq i < j \leq n)$ értékek összege, hiszen minden egyes l_{ij} pontosan egyszer szerepel S-ben, mégpedig az a_i-t és a_j-t definiáló összegek közül abban, amelyik a később meghatározott potenciálhoz tartozik. □

Megjegyzés. A feladat és a megoldása is sokkal világosabb, ha átfogalmazzuk gráfokra. Ilyen szóhasználattal élve azt kell igazolnunk, hogy bárhogyan is rendelünk egy n pontú teljes gráf éleihez nemnegatív élhosszakat, a gráfnak létezik egy aciklikus (azaz irányított kört nem tartalmazó) irányítása, és az n csúcs mindegyikéhez hozzárendelhető egy-egy nemnegatív potenciál úgy, hogy a csúcsok potenciálösszege ne haladja meg az élek összhosszát, továbbá bármely uv irányított él esetén az u és v csúcsok potenciálkülönbsége legalább az uv él hossza legyen.

A megoldás kulcsa, hogy a potenciálok megválasztásának sorrendje az l_{ij} élhosszakhoz tartozó úgynevezett minvissza sorrend. Ez úgy kapható, hogy tetszőleges csúcsból kiindulva, ha már kiválasztottuk a sorrend első néhány elemét, akkor a soron következő csúcs az lesz, amelynek össztávolsága az eddig választott csúcsoktól minimális. Ha ezek után a gráf minden élét a minvissza sorrendben korábban felbukkanó csúcsból a sorrendben később szereplő csúcsba irányítjuk, akkor a potenciálokat természetes módon definiálva éppen a kérdéses a_i számokat kapjuk meg.

Érdekes, hogy míg a hasonló módon definiált maxvissza sorrendet sokat vizsgálták (a segítségével például hatékony algoritmus adható arra, hogy egy összefüggő gráfban megtaláljuk a lehető legkevesebb élt, amelyek elhagyásától a gráf már nem marad összefüggő), addig a minvissza sorrendnek a bizottság tudomása szerint nem ismert hasonló alkalmazása.

Fleiner Tamás