Megmutatjuk, hogy a mondott feltételek mellett a bal oldal minden tagja kisebb a-nál, ebből a bizonyítandó egyenlőtlenség azonnal következik. Jelöljük a bal oldalon a k-adik tagot A_k-val.

Először is $A_1 < a$, mivel $\sqrt{a} < a$ alapján

$$A_1 = \sqrt{1+\sqrt{a}} < \sqrt{1+a} \leq \sqrt{1+a}\cdot\sqrt{-1+a} = \sqrt{a^2-1} < a.$$

Ha már tudjuk, hogy $A_k < a$ valamely $k \geq 1$-re, akkor

$$A_{k+1}^2 - 1 = \sqrt{a+\sqrt{a^2+\ldots+\sqrt{a^{k+1}}}} < \sqrt{a+\sqrt{a^3+\ldots+\sqrt{a^{k+2^k}}}} =$$
$$= \sqrt{a}\sqrt{1+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a^k}}} = \sqrt{a}\cdot A_k < a\sqrt{a}.$$

Ezért az $A_{k+1} < a$ a igazolásához – és a teljes indukció elve alapján a feladat állításának bizonyításához – mindössze azt kell megmutatnunk, hogy $a \geq 2$ esetén $a\sqrt{a} \leq a^2 - 1$.

Átrendezve

$$a - \sqrt{a} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{4}.$$

Ez pedig igaz, mert a bal oldal $(\sqrt{a}-1/2)^2 \geq (\sqrt{2}-1/2)^2 > 3/4$ és a jobb oldal értéke legfeljebb $1/2 + 1/4 = 3/4$.

Megjegyzések. 1. Azt bizonyítottuk, hogy az $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots$ sorozat minden tagja a alatt marad. Ez pedig – mivel a sorozat nyilvánvalóan szigorúan monoton növő – egyúttal azt is jelenti, hogy az $\{A_n\}$ sorozat *konvergens*. S ez nemcsak $a \geq 2$ esetén van így, hanem minden pozitív a esetén.

Például a

$B_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}}$ ($n+1$ darab egyes) sorozat határértéke 1,6180….

2. Az is belátható, hogy az A_n sorozat tagjaira $n \geq 2$ és $a \geq 2$ esetén

$$\sqrt{1+\sqrt{2}\sqrt{a}} \leq A_n < \sqrt{1+\sqrt{a}(1+\sqrt{3})}.$$