Láttuk, hogy a hatványközepek, ha a kitevőt nagyon kicsinek választjuk, tetszés szerint közel jutnak a mértani középhez. Kérdés most, mit tudunk mondani a hatványközepekről, ha a kitevő „nagyon nagy” lesz és ha „nagyon nagy” negatív értékeket vesz fel. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_k$, az adott nem negatív számok. Rendezzük őket mindjárt nagyság szerint, tehát legyenek pl. $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k$ és ne legyenek az összes a-k egyenlők. Képezzük a $q_1, q_2, \ldots, q_k$ (pozitív) súlyokkal súlyozott r-edik hatványközepet, tehát ha $q_1 + q_2 + \ldots + q_k = 1$, a

$$H_r = (q_1 a_1^r + q_2 a_2^r + \ldots + q_k a_k^r)^{1/r}$$

kifejezést.

Ez sem túl nagy, sem túl kicsi nem lehet. Legyen először r pozitív. Csökkentsük egyrészt a kifejezést úgy, hogy csak az utolsó tagot tartjuk meg belőle, másrészt növeljük a kifejezést, ha mindegyik a helyett a legnagyobbat írjuk. Így kapjuk, hogy

$$q_k^{1/r} a_k \leq H_r \leq \left[(q_1 + q_2 + \ldots + q_k) a_k^r\right]^{1/r} = a_k.$$

Ha viszont a kitevő $-r$ negatív szám, (tehát a fenti kifejezés tulajdonképpen nevezőben áll és ott is az a-k hatványainak reciprokai állnak), akkor nagyobbítjuk a kifejezés értékét, ha tagokat elhagyunk, pl. csak az elsőt tartjuk meg, viszont kisebbítjük, ha az egyes tagokat nagyobbítjuk pl. minden a-nak a $-r$-edik hatványa helyébe a_1^r-t írunk. Így azt kapjuk, hogy

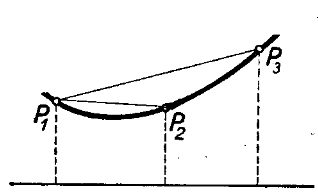
$$(1/q_1)^{1/r} a_1 = \left(q_1 a_1^{-r}\right)^{-1/r} > H_r \geq \left[(q_1 + q_2 + \ldots + g_k) a_1^{-r}\right]^{-1/r} = a_1.$$

[1]

Az előző közleményünk segédtételében megmutattuk (más jelöléseket használva), hogy ha c pozitív szám, akkor az u pozitív hatványkitevőt elég kicsinek választva elérhetjük, hogy c^u tetszés szerint kevéssel különbözzék 1-től. Ezt egyrészt $c = q_k$-val, másrészt $c = 1/q_1$-gyel, mindkét esetben $u = 1/r$-rel alkalmazva azt nyerjük, hogy egyrészt választhatjuk $1/r$-et elég kicsinek, tehát r-et elég nagynak ahhoz, hogy $q_k^{1/r} a_k$ tetszés szerint kevéssel különbözzék a_k-tól, másrészt ismét r-et elég nagynak választva elérhető, hogy $(1/q_1)^{1/r} a_1$ tetszés szerint kevéssel különbözzék a_1-től. Az így választott kitevőkkel véve a H_r hatványközép is tetszés szerint közel lesz a_k-hoz, ill. a H_{-r} közép tetszés szerint közel jut a_1-hez. Így ha a kitevőt minden határon túl növeljük, a hatványközép tetszés szerint közel kerül az a-k legnagyobbikához, ha pedig negatív értékeken át minden határon túl csökkentjük, akkor tetszőlegesen közel jut az a-k legkisebbikéhez. [2]

A IV. közleményben említettünk a konvexségre jellemző néhány újabb geometriai tulajdonságot. Így egy $f(x)$ függvény görbéje konvex, egy szakaszon, ha e szakasz bármely három növekvő abszcisszák szerint következő P_1, P_2, P_3 pontjára fennáll, a következő tulajdonságok bármelyike:

a) hogy a P_1P_2 húr a P_1P_3 húr alatt van,
b) hogy a P_2P_3 húr a P_1P_3 húr alatt van,
c) hogy a P_1P_2 húr meghosszabbítása a P_2P_3 húr alá fut.



Fejezzük ki e tulajdonságokat az algebra nyelvén. Ha két egyenesnek egy pontja közös, akkor egy nagyobb abszcissza-értéknél az van magasabban, egy kisebb abszcissza-értéknél pedig az van mélyebben, amelyiknek a meredeksége nagyobb. Az $f(x)$ görbe ξ és ξ' abszcisszájú pontok közti húrjának a meredeksége pedig

$$\frac{f(\xi') - f(\xi)}{\xi' - \xi}.$$

Így ha a három pont abszcisszái x_1, x_2, x_3, akkor a fenti tulajdonságokat rendre az

(a) $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},$$

(b) $$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

(c) $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

[1] Ezzel megoldását adtuk a 380. feladatnak. *Megoldotta:* Kántor S. , Zatykó L.
[2] Ezzel megoldását adtuk a 381. feladatnak. *Megoldotta:* Kántor S. , Zatykó L.

egyenlőtlenségek fejezik ki. Mindegyik egyenlőséget átszorozhatjuk a nevezők szorzatával, mert feltétel szerint $x_1 < x_2 < x_3$ és így mindegyik nevező pozitív. Ha még a kapott egyenlőtlenséget nullára redukáljuk és $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$-at röviden y_1, y_2, y_3-mal jelöljük, akkor mindhárom egyenlőtlenségből az

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) > 0 \tag{t}$$

egyenlőtlenséghez jutunk és ez vissza is alakítható a három egyenlőtlenség bármelyikévé. A (t) egyenlőtlenség baloldalán álló kifejezés a $P_1P_2P_3$ háromszög kétszeres területének kifejezése koordináták segítségével. Így a kapott egyenlőtlenség szerint a három pont nem sorakozhat egy egyenesen, sőt azt is tudjuk, hogy ha a területet pozitív előjellel adja a képlet, akkor a P_1, P_2, P_3 csúcsok az óra járásával ellenkező körüljárás sorrendjében következnek. Ez a geometriai tulajdonság tekinthető a konvexség újabb geometriai jellemzésének is, amiből könnyen következnek az (a), (b) és (c) tulajdonságok. Könnyű látni, hogy ez a geometriai tulajdonság tartalmazza a kéttagú súlyozott Jensen-egyenlőtlenséget is, amit eredetileg a konvexség jellemzésére használtunk. Utóbbit úgy kaptuk, hogy az algebra nyelvére fordítottuk a következő tulajdonságot: a P_2 pont a P_1P_3 húr alatt van. Mivel x_2 az (x_1, x_3) szakaszt $(x_2 - x_1) : (x_3 - x_2)$ arányban osztja, így a P_1P_3 húr x_2 abszcisszájú pontja ugyanilyen arányban osztja a húrt, tehát ordinátája

$$\frac{(x_3 - x_2)\, f(x_1) + (x_2 - x_1)\, f(x_3)}{x_3 - x_1}$$

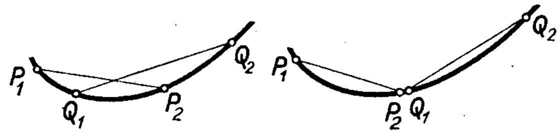
s így a mondott tulajdonságot az

$$f(x_2) < \frac{(x_3 - x_2)\, f(x_1) + (x_2 - x_1)\, f(x_3)}{x_3 - x_1} \tag{j}$$

egyenlőtlenség fejezi ki.

Ha itt egyrészt $\dfrac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} = q_1$, $\dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = q_2$-t írunk, tehát $q_1 + q_2 = 1$ és x_2 helyébe a vele azonos $q_1x_1 + q_2x_3$ értéket, (ami azt fejezi ki, hogy x_2 az $(x_1,\, x_3)$ szakaszt $q_2 : q_1 = (x_2 - x_1) : (x_3 - x_2)$ arányban osztja), akkor megkapjuk a Jensen-egyenlőtlenséget. Másrészt viszont a (j) egyenlőtlenség is átalakítható a (t) egyenlőtlenséggé, csupa olyan lépésekben, melyek ellenkező irányban is elvégezhetők, vagyis a (t) egyenlőtlenség átalakítható a Jensen-egyenlőtlenséggé is és viszont. Ebből az is következik, hogy az (a), (b), (c) egyenlőtlenségek mindegyike (és a (t) is) következik a Jensen-egyenlőtlenségből és megfordítva utóbbi is ezek bármelyikéből. [3]

Még általánosabban azt is mondhatjuk, hogy egy függvény konvex ha két húr közül, melyek egyikének mindegyik végpontja megelőzi a másik megfelelő végpontját (esetleg az egyik végpontjuk össze is eshet) mindig az első meredeksége kisebb. Legyenek a két húr végpontjának abszcisszái x_1 és x_2 ill. ξ_1 és ξ_2, $x_1 \leq \xi_1$, $x_2 \leq \xi_2$, de a két húr ne essék egybe, akkor a feltétel így írható:



$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(\xi_2) - f(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1}. \tag{d}$$

Itt x_2 lehet kisebb is, nagyobb is ξ_1-nél és össze is eshet vele. Ha itt x_1 és ξ_1 egybeesik, akkor (a)-t, ha x_2 és ξ_2 esik egybe, akkor (b)-t, ha pedig x_2 és ξ_1, akkor (c)-t kapjuk. De utóbbiakból is következtethetünk a (d) egyenlőtlenségre. Ha valamelyik két végpont egybeesik, akkor láttuk, hogy az (a), (b) vagy (c) egyenlőtlenséget kapjuk. Ha $x_2 < \xi_1$, akkor (a) szerint

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_1 - x_1} < \frac{f(\xi_1) - f(x_1)}{\xi_1 - x_1},$$

viszont (c) szerint

$$\frac{f(\xi_1) - f(x_1)}{\xi_1 - x_1} < \frac{f(\xi_2) - f(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1}.$$

A kettőből következik (d). Ha viszont $x_2 > \xi_1$, akkor (a) szerint

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(\xi_2) - f(x_1)}{\xi_2 - x_1},$$

viszont (b) szerint

$$\frac{f(\xi_2) - f(x_1)}{\xi_2 - x_1} < \frac{f(\xi_2) - f(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1},$$

[3] Ezzel megoldását adtuk a 382. feladatnak. *Megoldotta:* Kántor S. , Reichlin V., Zatykó L.

a kettőből ismét következik (d). A föntebbi meggondolás szerint akkor a Jensen egyenlőtlenség teljesüléséből is következik a (d) egyenlőtlenség és megfordítva a Jensen-egyenlőtlenség is (d)-ből. [4]

A (d) egyenlőtlenség ismételt alkalmazásával nyerjük a következőt: Legyen $u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_k$, $v_1 \geq v_2 \geq \ldots \geq v_k$, de legalább az egyik sorozat ne álljon csupa egyenlő elemből, végül vezessük be a következő jelöléseket:

$$D_1 = \frac{f(v_1) - f(u_1)}{v_1 - u_1}, \quad D_2 = \frac{f(v_2) - f(u_2)}{v_2 - u_2}, \quad \ldots, \quad D_k = \frac{f(v_k) - f(u_k)}{v_k - u_k}.$$

Ekkor kapjuk, ha $f(x)$ konvex függvény, hogy

$$D_1 \geq D_2, \quad D_2 \geq D_3, \quad \ldots, \quad D_{k-1} \geq D_k,$$

azaz $D_1 - D_2 \geq 0, \qquad D_2 - D_3 \geq 0, \quad \ldots, \quad D_{k-1} - D_k \geq 0.$

Feltevésünk szerint nem állhat mindenütt az egyenlőség jele.

Legyen $U_1 = u_1, \quad U_2 = u_1 + u_2, \quad \ldots, \quad U_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_k,$
és $V_1 = v_1, \quad V_2 = v_1 + v_2, \quad \ldots, \quad V_k = v_1 + v_2 + \ldots + v_k.$

Ha most $U_1 < V_1$, $U_2 < V_2 \ldots$, $U_{k-1} < V_{k-1}$, de $U_k = V_k$, akkor ezeket rendre szorozva a fönti pozitív mennyiségekkel és összeadva kapjuk, hogy

$$\begin{gathered} U_1(D_1 - D_2) + U_2(D_2 - D_3) + \ldots + U_{k-1}(D_{k-1} - D_k) + U_k D_k < \\ < V_1(D_1 - D_2) + V_2(D_2 - D_3) + \ldots + V_{k-1}(D_{k-1} - D_k) + V_k D_k, \end{gathered}$$

és a D-k szerint átrendezve (miután $U_2 - U_1 = u_2$, $U_3 - U_2 = u_3$, $\ldots$, $U_k - U_{k-1} = u_k$ és hasonló érvényes a V-kre) kapjuk, hogy

$$u_1 D_1 + u_2 D_2 + \ldots + u_k D_k < v_1 D_1 + v_2 D_2 + \ldots + v_k D_k,$$

ha az $f(x)$ függvény konvex. [5]

Redukáljuk az egyenlőtlenséget nullára. A D-k jelentését tekintetbe véve a szorzókkal tudunk egyszerűsíteni és az

$$\big(f(v_1) - f(u_1)\big) + \big(f(v_2) - f(u_2)\big) + \ldots + \big(f(v_k) - f(u_k)\big) > 0,$$

vagy

$$f(u_1) + f(u_2) + \ldots + f(u_k) < f(v_1) + f(v_2) + \ldots + f(v_k)$$

egyenlőtlenséghez jutunk.

Tegyük most fel megfordítva, hogy egy $f(x)$ függvényről csak annyit tudunk, hogy kielégíti az utolsó egyenlőtlenséget, ha az u-k és v-k eleget tesznek a fönti feltételeknek. Legyenek ekkor $v_1 \geq v_2 \geq \ldots \geq v_k$ olyan számok, melyek közt vannak különbözők.

Ekkor $v_1 > \dfrac{v_1 + v_2 + \ldots + v_k}{k}$, $\dfrac{v_1 + v_2}{2} > \dfrac{v_1 + v_2 + \ldots v_k}{k} \ldots$, $\dfrac{v_1 + v_2 + \ldots + v_{k-1}}{k-1} > \dfrac{v_1 + v_2 + \ldots + v_k}{k}$.

Így $u_1 = u_2 = \ldots = u_k = \dfrac{v_1 + v_2 + \ldots + v_k}{k}$ választás mellett ki vannak elégítve a kérdéses egyenlőtlenségek s így fennáll a

$$k\, f\left(\frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_k}{k}\right) < f(v_1) + f(v_2) + \ldots + f(v_k)$$

egyenlőtlenség, ami nem más, mint a k-tagú szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenség. Tudjuk azonban, hogy ennek teljesüléséből következik a függvény konvex volta. $f(x)$ tehát konvex függvény. [6]

Vizsgálatainkat átvihetjük többváltozós függvényekre is. Kétváltozós függvényt még tudunk ábrázolni a térben: a $z = F(x, y)$ függvény értékeit úgy ábrázolhatjuk, hogy a független változók egy x, y értékpárját egy síkbeli koordináta rendszerben ábrázoljuk és a függvényértékeket egy-egy ilyen pontban a síkra merőleges irányban ábrázoljuk. Minden számbajövő helyen ilyen módon ábrázolva a függvényt általában egy felület alakul ki a pontokból. Ez ismét lehet domború vagy homorú (alulról nézve). Ezekben az esetekben a függvényt is, aminek a felület a képe konvexnek, ill. konkávnak fogjuk nevezni. Pl. a konvexséget geometriailag a térben is azzal jellemezhetjük, hogy a felület két pontját összekötő húr mindig a felület fölött van. Mivel az $(x_1,\, y_1)$, $(x_2,\, y_2)$, pontok közti szakaszt $q_2 : q_1$ arányban osztó pont koordinátái, ha még $q_1 + q_2 = 1$, $(q_1 x_1 + q_2 x_2,\ q_1 y_1 + q_2 y_2)$ és ebben a pontban a görbén a $z_1 = F(x_1, y_1)$, $z_2 = F(x_2, y_2)$ ordináták közti húr ordinátája $q_1 z_1 + q_2 z_2$, így az említett geometriai tulajdonságot az

$$F(q_1 x_1 + q_2 x_2,\ q_1 y_1 + q_2 y_2) < q_1 F(x_1, y_1) + q_2 F(x_2, y_2)$$

Jensen-egyenlőtlenség írja le. Több változó esetén már geometriailag nem tudjuk a függvényt szemléletesen ábrázolni, a konvexség fogalmát azonban ebben az esetben is értelmezhetjük éppen a fenti egyenlőtlenség megfelelőjével. Egy

[4] Ezzel megoldását adtuk a 385. feladatnak. *Megoldotta:* Reichlin V., Zatykó L.

[5] Ezzel megoldását adtuk a 386. feladatnak. *Megoldotta:* Kántor S.

[6] Ezzel megoldását adtuk a 387. feladatnak. *Megoldotta:* Kántor S.

$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvényt konvexnek nevezzük, ha bármely két $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ pontra és q_1, q_2 pozitív súlyokra, melyekre $q_1 + q_2 = 1$ fennáll az

$$\begin{aligned} &F(q_1x_1 + q_2y_1, q_1x_2 + q_2y_2, \ldots, q_1x_n + q_2y_n) < \\ &< q_1F(x_1, x_2, \ldots, x_n) + q_2F(y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

egyenlőtlenség. Speciálisan, ha $q_1 = q_2 = \dfrac{1}{2}$, akkor kapjuk az

$$\begin{aligned} &F\left(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_2 + y_2}{2}, \ldots, \frac{x_n + y_n}{2}\right) < \\ &< \frac{F(x_1, x_2, \ldots, x_n) + F(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{2} \end{aligned}$$

szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenséget. Ismét igaz, hogy ennek a teljesüléséből következik a két és az akárhány tagú súlyozott Jensen-egyenlőtlenség teljesülése is, legalábbis racionális súlyok esetén. A bizonyítást kétváltozós függvényre mondjuk el. Több változóra szószerint ugyanígy történhetik, csak írni kell többet. Feltesszük tehát, hogy egy $F\ (x, y)$ függvényre teljesül az

$$F\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) < \frac{F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2)}{2}$$

egyenlőtlenség. A Cauchy-féle gondolatmenetet követve először is megmutatjuk, hogy teljesül a hasonló, de 2^k tagú szimmetrikus egyenlőtlenség. $k = 1$-re az állítás csak a feltételi egyenlőtlenséget jelenti. Tegyük fel, hogy valamilyen j-re már tetszés szerinti nem csupa egyenlő (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_{2^j}, y_{2^j}) pontpárok esetén bebizonyítottuk az

$$\begin{aligned} &F\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2^j}}{2^j}, \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_{2^j}}{2^j}\right) < \\ &< \frac{F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2) + \ldots + F(x_{2^j}, y_{2^j})}{2^j} \end{aligned}$$

egyenlőtlenséget. Legyen most adva 2^{j+1} számú pont:

$$(x_1, y_1), \ldots, (x_{2^j}, y_{2^j}), (x_{2^j+1}, y_{2^j+1}) \ldots (x_{2^{j+1}}, y_{2^{j+1}}).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} &F\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{2^j+1} + x_{2^j+1} + \ldots + x_{2^{j+1}}}{2^{j+1}}, \frac{y_1 + \ldots + y_{2^j} + y_{2^j+1} + \ldots + y_2^{j+1})}{2^{j+1}}\right) = \\ &= F\left(\frac{\dfrac{x_1 + \ldots + x_{2^j}}{2^j} + \dfrac{x_{2^j+1} + \ldots + x_{2^{j+1}}}{2^j}}{2}, \frac{\dfrac{y_1 + \ldots + y_{2^j}}{2^j} + \dfrac{y_{2^j+1} + \ldots + y_{2^{j+1}}}{2^j}}{2}\right) \le \\ &\le \frac{1}{2}\left\{F\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{2^j}}{2^i}, \frac{y_1 + \ldots + y_{2^j}}{2^j}\right) + F\left(\frac{x_{2^j+1} + \ldots + x_{2^{j+1}}}{2^j}, \frac{y_{2^j+1} + \ldots + y_{2^{j+1}}}{2^j}\right)\right\} \le \\ &\le \frac{\dfrac{F(x_1, y_1) + \ldots + F(x_{2^j}, y_{2^j})}{2^j} + \dfrac{F(x_{2^j+1}, y_{2^j+1}) + \ldots + F(x_{2^{j+1}}, y_{2^{j+1}})}{2^j}}{2} = \\ &= \frac{F(x_1, y_1) + \ldots + F(x_{1^j}, y_{2^j}) + F(x_{2^j+1}, y_{2^j+1}) + \ldots + F(x_{2^{j+1}}, y_{2^{j+1}})}{2^{j+1}}. \end{aligned}$$

Ha a pontok nem mind esnek egybe, akkor nem állhat fenn mindenütt az egyenlőség jele s így teljes indukcióval bizonyítottuk állításunkat.

Ha most van tetszés szerinti számú pontunk: $(x_1,\ y_1)$, …, $(x_k,\ y_k)$, akkor válasszuk j-t úgy hogy $2^{j-1} < k < 2^j$, ($k = 2^j$-re már bizonyítottuk a szimmetrikus egyenlőtlenség teljesülését) és legyen

$$x = \frac{x_1 + \ldots + x_k}{k}, \quad y = \frac{y_1 + \ldots + y_k}{k}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} &F(x, y) = F\left(\frac{x_1 + \ldots + x_k}{k}, \frac{y_1 + \ldots + y_k}{k}\right) = \\ &= F\left(\frac{x_1 + \ldots + x_k + (2^j - k)x}{2^j}, \frac{y_1 + \ldots + y_k + (2^j - k)y}{2^j}\right) < \\ &< \frac{F(x_1, y_1) + \ldots + F(x_k, y_k) + (2^j - k)F\ (x, y)}{2^j} \end{aligned}$$

az éppen bizonyított állítás szerint, ez pedig átrendezve a

$$kF(x,y) < F(x_1,y_1) + \ldots + F(x_k,y_k)$$

egyenlőtlenséget adja, vagy x és y jelentését beírva és k-val osztva

$$F\left(\frac{x_1+\ldots+x_k}{k}, \frac{y_1+\ldots+y_k}{k}\right) < \frac{F(x_1,y_1)+\ldots+F(x_k,y_k)}{k},$$

vagyis teljesül a k tagú szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenség is.

A *racionális* súlyokkal súlyozott Jensen-egyenlőtlenséget mindig átírhatjuk szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenséggé, melyben az egyes alappontok többször ismétlődnek. Így ezen egyenlőtlenség teljesülése is következik levezetésünkből.

Ahhoz, hogy a tetszőleges valós súlyokkal súlyozott Jensen-egyenlőtlenséget is szigorúan bebizonyíthassuk, fel kellene tenni a függvényről, hogy nem változhat hirtelen túl nagyot a függvényérték, ha az egyes változók csak nagyon kevéssel változnak. Természetesen először is ezt a nagyon hozzávetőlegesen fogalmazott tulajdonságot – amit a függvény folytonosságának nevezünk – matematikai szigorúsággal kellene megfogalmazni, azután szigorúan be kellene bizonyítani ez esetben is a Jensen-egyenlőtlenség teljesülését. Ezzel lenne teljes annak a bizonyítása, hogy a kéttagú szimmetrikus egyenlőtlenség teljesülése is elegendő ahhoz, hogy a függvény konvexségére következtethessünk. Bár ennek a részleteibe nem fogunk most belemenni, a tételt mégis fel fogjuk használni.

Nyilvánvalóan ugyanezen az úton bizonyíthatjuk azt is, hogy egy $G(x_1,\ldots,x_n)$ többváltozós függvény akkor és csakis akkor konkáv, ha bármely két $(x_1,\ldots,x_n)$ és $(y_1,\ldots,y_n)$ „pontra".

$$G\left(\frac{x_1+y_1}{2},\ldots,\frac{x_n+y_n}{2}\right) > \frac{G(x_1,\ldots,y_n)+G(y_1,\ldots,y_n)}{2}.$$

Hasonló egyenlőtlenségekkel jellemezhetők a tágabb értelemben konvex és tágabb értelemben konkáv függvények is. [7]

Példaképpen vegyük a pozitív értékekre értelmezett $\sqrt{xy}$ függvényt. Erre képezve a szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenségben szereplő két oldal különbségét:

$$\sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)} - \frac{\sqrt{x_1y_1}+\sqrt{x_2y_2}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x_1+x_2)(y_1+y_2) - \left(\sqrt{x_1y_1}+\sqrt{x_2y_2}\right)^2}{\sqrt{(x_1+y_2)(y_1+y_2)}+\sqrt{x_1y_1}+\sqrt{x_2y_2}}.$$

Itt a nevező pozitív, a számláló így alakítható tovább a négyzet tagokra bontása és összevonás után:

$$x_1y_2 + x_2y_1 - 2\sqrt{x_1y_1x_2y_2}.$$

Itt az első két tag az x_1y_2 és x_2y_1 számok számtani közepének, a kivonandó pedig mértani közepüknek a kétszerese. Így a különbség nem lehet negatív. A kifejezés értéke 0 lehet azonban, ha $x_1y_2 = x_2y_1$, azaz $x_1/y_1 = x_2/y_2$. A felület tehát tágabb értelemben konkáv. Az (x,y) síkon a kezdő ponton átmenő egyenesek fölött a felületen is egyenesek húzódnak.

A $\overset{a}{\log}\,(a^x+a^y)$ függvényre

$$\frac{\overset{a}{\log}\,(a^{x_1}+a^{y_1}) + \overset{a}{\log}\,(a^{x_2}+a^{y_2})}{2} = \overset{a}{\log}\,\sqrt{(a^{x_1}+a^{y_1})(a^{x_2}+a^{y_2})} \geq$$

$$\geq \overset{a}{\log}\,(\sqrt{a^{x_1+y_1}}+\sqrt{a^{x_2+y_2}}) = \overset{a}{\log}\,\left(a^{\frac{x_1+z_1}{2}} + a^{\frac{x_2+y_2}{2}}\right)$$

az előbb bizonyított egyenlőtlenség szerint feltéve, hogy $a > 1$. Egyenlőség akkor állhat, ha $a^{x_1-y_1} = a^{x_2-y_2}$. Ha $0 < a < 1$, akkor a fordított egyenlőtlenség érvényes, tehát $\overset{a}{\log}\,(a^x+a^y)$ tágabb értelemben konvex, ha $a > 1$ és tágabb értelemben konkáv, ha $0 < a < 1$.

Vizsgáljuk most az $x^{q_1}x^{q_2}$ függvényt ha x, y, q_1 és q_2 pozitív és $q_1+q_2 = 1$. Itt az

$$\frac{x_1^{q_1}y_2^{q_2}+x_2^{q_1}y_2^{q_2}}{2} \quad \text{és} \quad \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{q_1}\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^{q_2} = \frac{1}{2}(x_1+x_2)^{q_1}\,(y_1+y_2)^{q},$$

kifejezéseket kell összehasonlítanunk. A kettő hányadosát fogjuk tudni alkalmasan átalakítani, felhasználva, hogy két mennyiség súlyozott mértani közepe kisebb az ugyanazon súlyokkal súlyozott számtani középnél.

$$\frac{x_1^{q_1}y_1^{q_2}+x_2^{q_1}y_2^{q_2}}{(x_1+x_2)^{q_1}(y_1+y_2)^{q_2}} = \left(\frac{x_1}{x_1+x_2}\right)^{q_1}\left(\frac{y_1}{y_1+y_2}\right)^{q_2} + \left(\frac{x_2}{x_1+x_2}\right)^{q_1}\left(\frac{y_2}{y_1+y_2}\right)^{q_2} \leq$$

$$\leq q_1\,\frac{x_1}{x_1+x_2} + q_2\,\frac{y_1}{y_1+y_2} + q_1\,\frac{x_2}{x_1+x_2} + q_2\,\frac{y_2}{y_1+y_2} = q_1+q_2 = 1.$$

[7] Ezzel megoldását adtuk a 389. feladatnak.

Egyenlőség akkor állhat, ha

$$\frac{x_1}{x_1+x_2}=\frac{y_1}{y_1+y_2} \quad \text{és} \quad \frac{x_2}{x_1+x_2}=\frac{y_2}{y_1+y_2},$$

azaz, ha $x_1/y_1 = x_2/y_2$. Az $x^{q_1}y^{q_2}$ függvény tehát, ha $q_1+q_2=1$, tágabb értelemben konkáv. Hasonlóan az $x_1^{q_1}x_2^{q_2}\ldots x_n^{q_n}$ függvényre, ha x_1, x_2, …, x_n; y_1, y_2, …, y_n; q_1, q_2, …, q_n pozitív és $q_1+q_2+\ldots+q_n=1$, akkor

$$\frac{\dfrac{x_1^{q_1}x_2^{q_2}\ldots x_n^{q_n}+y^{q_1}y^{q_2}\ldots y_n^{q_n}}{2}}{\left(\dfrac{x_1+y_1}{2}\right)^{q_1}\left(\dfrac{x_2+y_2}{2}\right)^{q_2}\ldots\left(\dfrac{x_n+y_n}{2}\right)^{q_n}}=$$

$$=\left(\frac{x_1}{x_1+y_1}\right)^{q_1}\left(\frac{x_2}{x_2+y_2}\right)^{q_2}\ldots\left(\frac{x_n}{x_n+y_n}\right)^{q_n}+\left(\frac{y_1}{x_1+y_1}\right)^{q_1}\left(\frac{y_2}{x_2+y_2}\right)^{q_2}\ldots\left(\frac{y_n}{y_n+y_n}\right)^{q_n}\le$$

$$\le q_1\frac{x_1}{x_1+y_1}+q_2\frac{x_2}{x_2+y_2}+\ldots+q_n\frac{x_n}{x_n+y_n}+q_1\frac{y_1}{x_1+y_1}+q_2\frac{y_2}{x_2+y_2}+\ldots+q_n\frac{y_n}{x_n+y_n}=$$

$$=q_1+q_2+\ldots+q_n=1.$$

A függvény tehát ismét tágabb értelemben konkáv. Írjuk fel a k tagú szimmetrikus egyenlőtlenséget. Jelöljünk k számú szám n-est $\left(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\ldots,x_n^{(1)}\right)$, $\left(x_1^{(2)},x_2^{(2)},\ldots,x_n^{(2)}\right)$, …, $\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots,x_n^{(k)}\right)$-val, ekkor

$$\left(\frac{x_1^{(1)}+x_1^{(2)}+\ldots+x_1^{(k)}}{k}\right)^{q_1}\left(\frac{x_2^{(1)}+x_2^{(2)}+\ldots+x_2^{(k)}}{k}\right)^{q_2}\ldots\left(\frac{x_n^{(1)}+\ldots+x_n^{(k)}}{k}\right)^{q_n}\ge$$

$$\ge\frac{x_1^{(1)q_1}x_2^{(1)q_2}\ldots x_n^{(1)q_n}+x_1^{(2)q_1}\ldots x_n^{(2)q_n}+\ldots+x_1^{(k)q_1}x_2^{(k)q_2}\ldots x_n^{(k)q_n}}{k}.$$

Itt, mivel $q_1+q_2+\ldots q_n=1$, a nevezőket el is hagyhatjuk. [8]

Legyen $1/r+1/s=1$ $(r>1)$. Alkalmazzuk az utolsó egyenlőtlenséget

$$q_1=1/r,\ q_2=1/s,\ n=2,\ x^{(1)}=a_1^r,\ y^{(1)}=b_1^s,\ x^{(2)}=a_2^r,$$

$$y^{(2)}=b_2^s,\ \ldots,\ x^{(k)}=a_k^r,\ y^{(k)}=b_k^s\text{-re:}$$

$$(a_1^r+a_2^r+\ldots+a_k^r)^{1/r}(b_1^s+b_2^s+\ldots+b_k^s)^{1/s}\ge a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_kb_k.$$

Egyenlőség akkor áll, ha $a_1^r/b_1^s=a_2^r/b_2^s=\ldots=a_k^r/b_k^s$.
Ezt az egyenlőtlenséget nevezik Hölder-egyenlőtlenségnek. Speciálisan, ha $r=s=t$, akkor

$$\sqrt{a_1^2-a_2^2+\ldots+a_k^2}\,\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_k^2}\ge a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_kb_k$$

és egyenlőség csak akkor állhat, ha $a_1/b_1=a_2/b_2=\ldots=a_k/b_k$. Ezt az egyenlőtlenséget Cauchy–Schwarz-féle egyenlőtlenség néven ismerik, bár Bunyakovszkij már előbb is ismerte. [9]

A Hölder egyenlőtlenségben

$$1/s=1-1/r=(r-1)/r,\ s=r/(r-1).$$

Legyen $k=2$ és írjunk $b_1=c_1^{r-1},\ b_2=c_2^{r-1}$-et, ekkor

$$(a_1^r+a_2^r)^{1/r}(c_1^r+c_2^r)^{1-1/r}\ge a_1\,c_1^{r-1}+a_2\,c_2^{r-1}$$

alakban kapjuk az egyenlőtlenséget. (Egyenlőség áll, ha $a_1/c_1=a_2/c_2$). Írjunk itt c_1, c_2 helyett x_1+x_2 és y_1+y_2-t, a_1 és a_2 helyére előbb x_1, y_1-et, azután x_2, y_2-t és adjuk össze a két egyenlőtlenséget:

$$\left[(x_1^r+y_1^r)^{1/r}+(x_2^r+y_2^r)^{1/r}\right]\left[(x_1+x_2)^r+(y_1+y_2)^r\right]^{1-1/r}\ge$$

$$\ge(x_1+x_2)(x_1+x_2)^{r-1}+(y_1+y_2)(y_1+y_2)^{r-1}=$$

$$=(x_1+x_2)^r+(y_1+y_2)^r.$$

A baloldal második tényezőjével, mely pozitív átosztva és osztva még $2\cdot2^{1/r}$-vel az

$$\frac12\left[\left(\frac{x_1^r+y_1^r}{2}\right)^{1/r}+\left(\frac{x_1^r+y_1^r}{2}\right)^{1/r}\right]\ge\left[\frac{\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^r+\left(\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)^r}{2}\right]^{1/r}$$

[8] Ezzel megoldását adtuk a 390. feladatnak.
[9] Ezzel megoldását adtuk a 391. feladatnak.

egyenlőtlenséghez jutunk. Egyenlőség áll, ha $\frac{x_1}{x_1+x_2} = \frac{x_1}{y_1+y_2}$ és $\frac{x_2}{x_1+x_2} = \frac{y_2}{y_1+y_2}$, azaz, ha $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$. Ez az $\left(\frac{x^r+y^r}{2}\right)^{1/r}$ függvény tágabb értelemben konvex voltát fejezi ki. Ha eljárásunkat nem a kéttagú, hanem a k tagú Hölder-egyenlőtlenségre alkalmazzuk, akkor ugyanúgy az

$$\left(\frac{x_1^r+x_2^r+\ldots x_k^r}{k}\right)^{1/r}$$

tágabb értelemben konvex voltát kifejező egyenlőtlenséghez jutunk. [10]

Írjuk fel utóbbi függvényre a kéttagú szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenséget, a két „helyet", ahol a függvény értékét vesszük $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$-val és $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$-val jelölve:

$$\left[\frac{\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)^r+\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right)^r+\ldots+\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right)^r}{k}\right]^{1/r} \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_1^r+a_2^r+\ldots+a_k^r}{k}\right)^{1/r}+\left(\frac{b_1^r+b_1^r+\ldots+b_k^r}{k}\right)^{1/r}\right].$$

$2\cdot k^{1/r}$-nel átszorozva az

$$\left[(a_1+b_1)^r+(a_2+b_2)^r+\ldots+(a_k+b_k)^r\right]^{1/r} \leq$$
$$\leq \left(a_1^r+a_2^r+\ldots+a_k^r\right)^{1/r}+\left(b_1^r+b_2^r+\ldots+b_k^r\right)^{1/r}$$

ú. n. Minkowski-féle egyenlőtlenséghez jutunk. [11]

[10] Ezzel megoldását adtuk a 392. feladatnak.
[11] Ezzel megoldását adtuk a 393. feladatnak.