

a) Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor  $A_2 < A_1$ . Tegyük fel, hogy a háromoldalú csonka gúla elmeszhető az alaplappal párhuzamos síkkal a kívánt módon. Jelöljük a síkmetszet területét  $A$ -val. Tekintsük a részekbe (ugyancsak háromoldalú csonka gúla) beírt gömböket. A nagyobb gömb sugarát jelöljük  $R_1$ -gyel, a kisebbét  $R_2$ -vel. Bármely két gömb hasonló, sőt hasonló helyzetű is, bármely pontot véve a hasonlóság centrumának. Esetünkben a gömbök külső hasonlósági pontja annak a gúlának a főcsúcsa ( $H$ ), amelyből az eredeti csonka gúla származtatható. Ez a pont ugyanis rajta van a gömbök három különböző közös külső érintősíkján.

Az a  $H$  középpontú nyújtás, melynél az  $R_2$  sugarú gömb képe az  $R_1$  sugarú gömb, az  $A_2$  területű lapot az  $A$  területűbe, az  $A$  területűt pedig az  $A_1$  területűbe viszi át, hiszen e lapok síkjai egymással párhuzamos érintősíkok. Ebből következik, hogy a csonka gúla két része hasonló egymáshoz; a hasonlóság lineáris aránya egyenlő a beléjük írt gömbök sugarainak arányával. Ennek alapján

$$\frac{A}{A_2} = \frac{A_1}{A} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2,$$

ahonnan

$$A = \sqrt{A_1 A_2}.$$

Jelöljük az  $R_1$ , ill.  $R_2$  sugarú gömb köré írt csonka gúla palástjának területét  $P_1$ -gyel, ill.  $P_2$ -vel. A feladatban szereplő  $P$  ezek összegével egyenlő. Annak érdekében, hogy  $P$ -t  $A_1$ ,  $A_2$ -vel kapcsolatba hozzuk, térfogatra vonatkozó összefüggéseket használunk fel. A csonka gúla ismert térfogat képlete:

$$V = \frac{m}{3}(T + \sqrt{T}t + t).$$

Másfelől minden olyan konvex poliéder, amelybe gömb írható, felbontható olyan gúlákra, amelyek közös magassága a beírt gömb sugara, azok az alaplappal pedig, amelyekhez ez a magasság tartozik, együttesen a test határoló lapjait adják. Az ilyen test térfogata ezért egyenlő a test felszíne és a beírt gömb sugara szorzatának a harmadrésével. Írjuk fel pl. az  $R_1$  sugarú gömb köréírt csonka gúla térfogatát mindkét módon. Nyilvánvaló, hogy a magasság a gömb átmérője.

$$\frac{2R_1}{3}(A_1 + \sqrt{A_1 A} + A) = \frac{R_1}{3}(A_1 + A + P_1).$$

Az egyenletből

$$P_1 = A_1 + 2\sqrt{A_1 A} + A = (\sqrt{A_1} + \sqrt{A})^2,$$

és hasonlóan

$$P_2 = (\sqrt{A} + \sqrt{A_2})^2.$$

Felhasználva az  $A = \sqrt{A_1 A_2}$  összefüggést,

$$P_1 = \sqrt{A_1} \left( \sqrt[4]{A_1} + \sqrt[4]{A_2} \right)^2$$

adódik. Hasonló módon kapjuk, hogy

$$P_2 = \sqrt{A_2} \left( \sqrt[4]{A_1} + \sqrt[4]{A_2} \right)^2.$$

$$P = P_1 + P_2 = (\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2}) \left( \sqrt[4]{A_1} + \sqrt[4]{A_2} \right)^2.$$

amit bizonyítanunk kellett.

b) Az  $A_1 = A_2$  esetben háromoldalú hasábról van dolgunk. Ekkor  $A$  is egyenlő a közös értékkel. A bizonyítandó állítás a

$$P = 8A$$

összefüggésre egyszerűsödik. Ha a részekbe gömb írható, a metsző sík a hasábot félmagasságban vágja ketté, és a magasság fele egyenlő az átmérővel. A gömbök sugara legyen  $R$ . Az egyik részre felírva a térfogattal egyenlő kifejezéseket

$$2RA = \frac{R}{3} \left( 2A + \frac{P}{2} \right),$$

ahonnan

$$P = 8A.$$

(L. L.)

Nyikes Péter (Miskolc, Földes F. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. A megoldás során sehol sem használtuk ki, hogy a feladatban szereplő csonka gúla háromoldalú.