Felhasználjuk a Heron-féle területképletet:

$$\begin{aligned}16t^2 &= (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = \\ &= \left((a+b)^2-c^2\right)\left(c^2-(a-b)^2\right).\end{aligned}$$

Esetünkben $a=410,\ b=500$ egységnyi és c a harmadik oldal, amelyre tehát $500-410=90<c<910$, és

$$16t^2=(910^2-c^2)(c^2-90^2).$$

Mivel t egész szám, azért a bal oldal páros szám, tehát jobbról is van páros tényező. Sőt mindkettő páros, hiszen összegük: 910^2-90^2, páros, ezért egyező párosságúak. Így c^2 páros és vele c is az, $c=2c_1$, ahol c_1 egész (valamint a továbbiakban használatba veendő betűk mindegyike is). Ezt beírva

$$t^2=(455^2-c_1^2)(c_1^2-45^2). \tag{1}$$

Itt c_1 nem lehet páros, mert úgy $c_1^2=(2k)^2=4k^2$ alapján az első tényező $(4l+1)$ alakú lenne, ahogy minden páratlan szám négyzete: $(2m+1)^2=4m(m+\ +1)+1$ alakú; a második tényező ugyanezért $4l-1$ alakú lenne, így pedig a jobb oldali szorzat is $4q-1$ alakú, nem lehetne tehát semmilyen t egész szám négyzete. Eszerint c_1 páratlan, írjuk így: $c_1=2c_2+1$, és itt $22<c_2<227$.

Ekkor viszont (1) mindkét tényezője többszöröse a 4-nek, t^2 pedig a 16-nak. Legyen ezért $t=4t_1$, ekkor a következő egyenlethez kell megoldást keresnünk egész t_1 és c_2 mellett:

$$\begin{aligned}16t_1^2 &= (454-2c_2)(456+2c_2)(2c_2-44)(2c_2+46), \\ t_1^2 &= (227-c_2)(c_2+23)(228+c_2)(c_2-22). \qquad (2)\end{aligned}$$

A négy tényező közül az elülső kettő is, a hátulsó kettő is egyező párosságú, mert összegeik párosak: 250, ill. $206+2c_2$; viszont az elülső két tényező ellentétes párosságú, mint a hátulsók, mert az első és harmadik tényező összege páratlan.

Ezek alapján a további keresést esetekre szétválasztva végezzük azáltal, hogy föltevéseket vezetünk be az egyik, ill. a másik tényezőpár párosságára. Ezekkel mindig bebiztosítjuk, hogy (2) jobb oldalán a 2-es prímszám kitevője páros legyen. Az így kínálkozó c_2 értékekkel azután megnézzük a teljes szorzatot, hogy négyzetszám-e. Az első ilyen gondolatmenet után a továbbiaknak csak az eredményét közöljük, a szükséges próbák nagyobb száma miatt.

I. Keressük elsőnek az olyan megoldásokat – feltéve, hogy léteznek ilyenek –, amelyekben (2)-nek első két tényezője páratlan, vagyis c_2 páros, méghozzá legyen

$$c_2=4\alpha+2 \text{ alakú.}$$

Ekkor a hátsó két tényező

$$230+4\alpha=2(115+2\alpha), \qquad \text{ill.} \qquad 4\alpha-20=4(\alpha-5),$$

az első zárójelben biztosan páratlan szám áll, és eddig 2^3-t tudtunk biztosítani. Ezért t_1^2 csak úgy lehet négyzetszám, ha $(\alpha-5)$ páros és törzsszámhatványok szorzatára bontva, 2-nek páratlan kitevős hatványát tartalmazza.

A $22<c_2=4\alpha+2<227$ korlátozás alapján $0<\alpha-5<52$. Ezek közt a korlátok közt $2^5\cdot p$ alakú szám egyedül a 32. (p a továbbiakban mindig az alkalmas páratlan számokat jelöli.) $\alpha-5=32$-ből $\alpha=37,\ c_2=150$, és evvel (2) jobb oldalának legnagyobb tényezője $228+c_2=378=2\cdot3^3\cdot7$, a nagyságra második $c_2+23=173$, prím, nem fordulhat elő a kisebb tényezőkben, innen tehát nem kapunk megoldást.

$\alpha-5=2^3\cdot p$ alakú számokat adnak korlátaink között
$\alpha=13,\ 29,\ 45$, ezekből rendre
$c_2=54,\ 118,\ 182$.

Csak a harmadik érték mellett lesz (2) jobb oldala négyzetszám: $(5\cdot3^2)\cdot205\cdot\ \cdot(2\cdot205)\cdot(5\cdot32)=\left(3\cdot2^3\cdot5\cdot205\right)^2$, ekkor a háromszög harmadik oldala $c=4c_2+2=730$.

Ha pedig az $\alpha-5=2p$ értékeket próbálgatjuk végig, az $\alpha-5=50$, $\alpha=55$, $c_2=222$, $c=890$ megoldás adódik, evvel $t_1=2^2\cdot3\cdot5^3\cdot7$.

II. Nézzük tovább a $c_2=4\beta$ esetet. Ekkor hasonlóan

$$228+c_2=4(\beta+57) \qquad \text{és} \qquad c_2-22=2(2\beta-11),$$

itt $(\beta+57)$-ben kívánjuk páratlan kitevővel a 2-es törzstényzőt és $5<\beta<57$.

Az egyetlen $\beta+57=2^5\cdot3$ alakú próbálkozás nem ad megoldást, ugyanígy azok sem, amelyekben $\beta+57=2^3\cdot p$.

Ha pedig $\beta+57=2p$, innen a $p=35,\ P=13,\ c_2=52$ útján a $c=210$ megfelelő oldalhosszat kapjuk, $t_1=2^2\cdot3\cdot5^3\cdot7$ (ugyanannyi, mint $c=890$ mellett).

III. Legyen végül (2)-ben az első két tényező páros, $c_2=2\gamma+1$, vagyis $10<\gamma<113$. Ekkor

$$227-c_2=2(113-\gamma), \qquad\qquad c_2+23=2(\gamma+12),$$

tehát szorzatukból 2-nek a négyzetét emelhetjük ki már előre, és (2) jobb oldala csak úgy lehet négyzetszám, ha a két utóbbi zárójelbeli kifejezés szorzatában (is) páros kitevővel szerepel a 2.

A zárójelekben ellentett párosságú számok állnak, mert az összegük 125, páratlan, így csak az egyik kifejezésben léphet föl tényezőként $2^2=4$ vagy hatványa.

A föntebbiek mintájára csak abból a föltevésből kiindulva kapunk megoldást, hogy $\gamma+12=4p$, éspedig $p=15$, $\gamma=48$, $c_2=97$ mellett $c=390$, ekkor (2)-ből $t_1^2=130\cdot 120\cdot 325\cdot 75=\left(2^2\cdot 3\cdot 5^3\cdot 13\right)^2$.

Mindezek szerint a kérdéses háromszög harmadik oldala 4 értéket vehet fel: 210, 390, 730 és 890. (Az első két megoldás összetolható egyenlő szárú háromszöggé, szárai 500 egységnyiek, alapja $210+390=600$.

Böröczky Károly (Budapest, Ságvári E. Gyak. Gimn., IV. o. t.)
Almássy Tamás (Nyíregyháza, Krúdy Gy. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Páratlan szám négyzetének fenti $4m(m+1)+1$ előállításáról azt is látjuk, hogy mindig $8q+1$ alakú, hiszen m és $(m+1)$ egyike páros, ennélfogva (1) mindkét tényezője 8-cal is osztható. Ezt azonban nem lehetne kihasználni (2) további redukálására, mert nem tudjuk helyhez kötni, melyik zárójelekben van további példány a 2-es prímtényezőből. Éppen ebből alakult ki az I–II., ill. III. részek elágazása.

2. Egyes megoldásokat összekereshetnénk az alábbi alkalmi meggondolásokkal is, ezen az úton azonban nehéz lenne áttekinteni, hogy eljutottunk-e minden megoldáshoz.

Megpróbálhatnánk, mely c_2 értékek mellett válnék teljes négyzetté (2) jobb oldalának valamelyik tényezője, továbbá, hogy ugyanekkor teljes négyzet-e a többi tényezők szorzata. – Nincs ilyen c_2 érték. (Viszont az egyszerűsítés előtt $c=890$ mellett $s-b=20^2$; de gondolhatnánk (2) *tényezőinek négyzetosztóira* is.

Følléphetne egy szám úgy is t_1^2-ben páros kitevővel (persze törzsszámra gondolunk), ha a négy tényező közül kettőnek közös tényezője, páratlan kitevővel.

Ha a $(227-c_2)$ és (c_2+23) tényezőknek van közös osztója, ez osztója az összegüknek, 250-nek is. Innen szóba jönnek t_1 osztói közé a 250 osztói.

Hasonlóan szóba jönnek a
$227-c_2$ és $228+c_2$ párból $455=5\cdot 7\cdot 13$ osztói,
$227-c_2$ és c_2-22 párból $205=5\cdot 41$ osztói,

valamint a további párokból ugyanerre az ötletre támaszkodva a különbségeik osztói is:
c_2+23 és c_2+228-ból ismét 205 osztói,
c_2+23 és c_2-22-ből ismét 45 osztói,
c_2+228 és c_2-22-ből ismét 250 osztói.

Annyit mindenesetre látunk ebből a (tovább járhatatlannak tekintendő) útból, hogy a terület mértékszámának törzstényezői közt csak a következők várhatók: 2, 3, 5, 7, 13, 41 (ti. ha azt már kipróbáltuk, hogy egyik zárójelnek sincs más prímszámnégyzet-osztója).

3. Bár a feladatot a geometriai feladatok között tűzte ki a szerkesztőség, valójában számelméleti jellegű volt, negyedfokú diofantoszi egyenletre vezetett, de redukálható felbontással. Viszonylag sok esetet kellett megvizsgálni, ezért a megoldók többsége elakadt félúton, vagy több lényeges eset vizsgálatát elmulasztotta. Ezért igen sok a sikertelen próbálkozás a dolgozatok között. Ezek egy része azért nem kapott pontot, mert számítógépes programot adtak, vagy kizárólag gépies próbálkozásokon alapultak (vö. a szeptemberi versenykiírás vége). A hiányos dolgozatok beküldői is hagytak ki néhány esetet, de értékelhető részeredményekre is jutottak. **(Cz. A.)**