17. *Mutassuk meg, hogy* $\binom{2n}{n} \geqq \frac{4^n}{2n}$.

**Megoldás:** Igazoljuk állításunkat teljes indukcióval. Az egyenlőtlenségben ha $n = 1$ az egyenlőség áll. $\binom{2}{1=\frac{4}{2}}$. Tegyük fel, hogy valamilyen $k$ értékre már igazoltuk az állítást. Vizsgáljuk meg a következő együtthatót:

$$\binom{2(k+1)}{k+1} = \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2}\binom{2k}{k} = \frac{2\cdot(2k+1)}{k+1}\binom{2k}{k} = 4\frac{(2k+1)}{2(k+1)}\binom{2k}{k} > 4\cdot\frac{2k}{2(k+1)}\cdot\binom{2k}{k}.$$

Így az indukciós feltevés szerint

$$\binom{2(k+1)}{k+1} > 4\cdot\frac{2k}{2(k+1)}\binom{2k}{k} \geqq 4\cdot\frac{2k}{2(k+1)}\cdot\frac{4^k}{2k} = \frac{4k+1}{2(k+1)},$$

tehát $k+1$-re is igaz az állítás. Ezzel bizonyítottuk, hogy $n$ mindne értékére igaz. [1]

*Megoldotta:* László Z.

18. *Tegyük fel ismét, hogy* $n \geqq 100$ *és hogy* $n$ *és* $2n$ *között nincs prímszám. Mutassuk meg, hogy akkor* $2^{\sqrt{2n}} \leqq (2n)^{\frac{3}{2}}$ *kellene legyen.*

**Megoldás:** A 16. és 17. feladatból következik, hogy

$$\frac{4^n}{2n} \leqq \binom{2n}{n} \leqq 2^{\sqrt{2n}-1}\cdot 4^{\frac{2n}{3}}, \quad \text{ha} \;\; n \geqq 100.$$

$2n\cdot 4^{-\frac{2n}{3}}$-nal szorozva:

$$4^{\frac{n}{3}} = 2^{\frac{2n}{3}} \leqq (2n)^{\frac{\sqrt{2n}}{2}}.$$

$\frac{3}{\sqrt{2n}}$-edik hatványra emelve:

$$2^{\sqrt{2n}} \leqq (2n)^{\frac{3}{2}}.$$

*Megoldotta:* László Z.

19. *Mutassuk meg, hogy:*

*a) ha* $u \geqq 4$ *és* $u$ *egész szám, akkor* $2^u \geqq 3(u+1)$,

*b) ha* $u \geqq 4$, *akkor* $2^u > 3u$ *(akár egész szám az* $u$*, akár nem),*

*c) ha* $u \geqq 12$, *akkor (megint, akár egész szám az* $u$*, akár nem),* $2^u \geqq u^3$.

**Megoldás:** *a)* Az egyenlőtlenséget teljes indukcióval fogjuk bizonyítani: $u = 4$ esetében $2^4 = 16 > 3(4+1) = 15$. Tegyük fel, hogy $u = n$ esetében igaz. Ekkor $2^{n+1} = 2^n + 2^n > 3(n+1) + 3(n+1) \geqq 3(n+1) + 3 = 3[(n+1)+1]$.

Tehát igaz $u = n+1$ esetében is.

*b)* Az éppen bebizonyított egyenlőtlenség szerint, ha $u \geqq 4$

$$2^u \geqq 2^{[u]} > 3([u]+1) > 3u.$$

*c)* Írjuk $u$-t $2^x$ alakban, akkor a bizonyítandó egyenlőtlenség akkor igaz, ha

$$2^{2^x} > 2^{3x}, \quad \text{vagyis ha} \quad 2^x > 3x,$$

ami *b)* szerint $x \geqq 4$, tehát $u = 2^4 = 16$-ra teljesül. $u = 12,\ 13,\ 14,\ 15$-re könnyű látni, hogy

$$2^u > (u+1)^3,$$

s így már $u \geqq 12$-re igaz, hogy

$$2^u \geqq 2^{[u]} > ([u]+1)^3 > u^3.$$

*Megoldotta:* László Z.

20. *Mutassuk meg, hogy* $n \geqq 100$ *esetén a 18. feladatban szereplő egyenlőtlenség nem állhat.*

**Megoldás:** 19. *c)* feladat egyenlőtlenségéből $u = \sqrt{2n} > \sqrt{200} > 14$ helyettesítésével azt nyerjük, hogy

$$2^{\sqrt{2n}} > (\sqrt{2n})^3 = (2n)^{\frac{3}{2}}.$$

*Megoldotta:* László Z.

[1] A binomiális tételen keresztül $4^n = 2^{2n} = (1+1)^{2n}$ kifejezésből nyerhetünk egy második megoldást.

21. *Mutassuk meg, hogy $n$ és $2n$ között ($2n$-et beleértve) mindig van prímszám; azaz: bizonyítsuk be Csebysev tételét.*

**Megoldás:** A 20. feladat állítása éppen azt tartalmazza, hogy ha Csebysev tétele nem volna igaz $n \geqq 100$ esetében, abból ellentmondás következnék. $n \geqq 100$-ra tehát igaznak kell lennie a tételnek. -től 100-ig egyszerűen próbálgatással győződhetünk meg a tétel helyességéről.

1 és 2 között van (a fölső határt is beleértve) a 2; 2és 4 közt a 3; $n = 3, 4$-re $n$ és $2n$ közt van az 5; $n = 5, 6$-ra a 7; $n =$ 7-től 12-ig a 13; $n =$ 13-tól a 22-ig a 23; 23-tól 42-ig a 43; 43-tól 82-ig a 83; végül $n =$ 83-tól 100-ig $n$és $2n$ közt van pl. a 101 törzsszám. Így a tétel $n =$ 1-től 100-ig is fennáll, s így megmutattuk, hogy minden $n$-re igaz.

*Megoldotta:* László Z.