11. *Tegyük fel, hogy n és $2n$ között nincs prímszám. Mutassuk meg, hogy akkor $\binom{2n}{n}$ nem lehet nagyobb, mint $2n$-nek annyiadik hatványa ahány prímszám van $\sqrt{2n}$-ig, megszorozva a $2n/3$-ig terjedő prímszámok szorzatával.*

Megoldás: Nézzük meg, hogy milyen prímszámok szerepelnek $\binom{2n}{n}$ prímtényezős felbontásában.

A 10. feladat szerint a $\frac{2n}{3}$és n közé eső prímszámok nem szerepelnek a felbontásban, a feltétel szerint pedig n és $2n$ között nincsenek prímszámok. Így $\binom{2n}{n}$ felbontásában csak $\frac{2n}{3}$-nál kisebb prímszámok szerepelnek. Ezeket osszuk két csoportra:

a) a $\sqrt{2n}$-nél kisebb prímszámokra, ezek $\binom{2n}{n}$ felbontásában szereplő hatványainak szorzata legyen N_1,

b) a $\sqrt{2n}$ és a $\frac{2n}{3}$ közé eső prímszámokra, ezek hatványainak szorzata legyen N_2.

Így a fentiekből következik, hogy $\binom{2n}{n} = N_1 N_2$.

A 8. feladat szerint minden $\binom{2n}{n}$ felbontásában szereplő prímszámhatvány kisebb $2n$-nél. Így, ha a $\sqrt{2n}$-nél kisebb prímszámok száma r, akkor $\sqrt{N_1} < (2n)^r$.

A 9. feladat szerint a $\sqrt{2n}$ és $\frac{2n}{3}$ közé eső prímszámok a felbontásban legfeljebb első hatványon szerepelnek, tehát N_2 nem lehet nagyobb, mint az összes $\sqrt{2n}$ és $\frac{2n}{3}$ közé eső prímszámok szorzata: N_3.

Tehát $\binom{2n}{n} = N_1 N_2 \leq (2n)^r \cdot N_3$,
amivel az állítást igazoltuk.

12. *Mutassuk meg, hogy $n \geq 14$ esetén n-ig legfeljebb $\frac{n}{2} - 1$ számú prímszám van.*

Megoldás: Az állítást teljes indukcióval igazoljuk.

A 14-ig és 15-ig terjedő prímszámok száma egyaránt $6 = \frac{14}{2} - 1$ és $< \frac{15}{2} - 1$, és így $n = 14$-re és $n = 15$-re a tétel fennáll.

Tegyük fel, hogy valamely K számra már tudjuk, hogy fennáll a tétel. Bebizonyítjuk, hogy ekkor $K+2$-re is fennáll.

Legyen K-ig a prímszámok száma $\pi(K)$. Feltétel, szerint $\pi(K) \leq \frac{K}{2} - 1$.

$K+1$ és $K+2$ közül az egyik páros szám, tehát csak a másik lehet prímszám. $K+2$-ig a prímszámok száma tehát legfeljebb 1-gyel nagyobb, mint K-ig, vagyis a feltétel felhasználásával:

$$\pi(K+2) \leq \pi(K) + 1 < \frac{K}{2} - 1 + 1 = \frac{K+2}{2} - 1.$$

Ezek szerint mivel a tétel 14-re igaz, következik, hogy minden további páros számra is igaz és mivel 15-re igaz, igaz minden nagyobb páratlan számra is, tehát 14-től kezdve minden számra.

13. *Mutassuk meg, hogyha n legalább 5, akkor $\binom{2n}{n}$ kisebb, mint 4^{n-1}.*

Megoldás: Az állítást teljes indukcióval igazoljuk. $n = 5$-re igaz a tétel, mert $\binom{10}{5} = 252 < 4^4$.

Legyen valamilyen k-ra igaz a tétel, vagyis $\binom{2k}{k} < 4^{k-1}$. Bebizonyítjuk, hogy ekkor $k+1$-re is igaz a tétel. Ehhez nézzük meg, hogy $\binom{2k}{k}$-ból hogyan kapjuk meg $\binom{2(k+1)}{k+1}$-et.

$$\binom{2(k+1)}{k+1} = \frac{(2k+2)(2k+1)(2k)(2k-1)\ldots(k+2)}{1 \cdot 2 \ldots (k+1)} =$$

$$= \frac{(2k)(2k-1)\ldots(k+2)(k+1)}{1 \cdot 2 \ldots (k+1)} \cdot \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2} =$$

$$= \binom{2k}{k} \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2}.$$

Mivel $\dfrac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2} = 2\dfrac{2k+1}{k+1} = 2\left(2 - \dfrac{1}{k+1}\right) < 4,$

$$\text{így } \binom{2(k+1)}{k+1} < 4\binom{2k}{k}.$$

A feltétel szerint $\dbinom{2k}{k} < 4^{k-1}$, tehát $\dbinom{2(k+1)}{k+1} < 4^k$.

Ezzel állításunkat igazoltuk.

14. *Mutassuk meg, hogyha egyáltalán van n és $2n$ között prímszám, akkor az ilyen prímszámok szorzata kisebb, mint 4^{n-1}.*

Megoldás: Az n és $2n$ közötti prímszámok szorzata kisebb $\dbinom{2n}{n}$-nél, mert n és $2n$ közötti prímszámok $\dbinom{2n}{n}$ számlálójában szerepelnek, nevezőjében nem így az egyszerűsítés után is megmaradnak, tehát $\dbinom{2n}{n}$-nek, mely egész szám, az n és $2n$ közötti prímszámok osztói, de általában ezenkívül még más törzsszámok is.

Mivel a 13. feladatnál megmutattuk, hogy $\dbinom{2n}{n} < 4^{n-1}$, így az n és $2n$ közé eső prímszámok szorzata még inkább kisebb 4^{n-1}-nél.

15. *Jelöljük P_n-nel az n számig terjedő prímszámok szorzatát. Mutassuk meg, hogy $P_n \le 4^n$.*

Megoldás: A tételt az előzők felhasználásával teljes indukcióval bizonyítjuk, először csak páratlan számokra. $n = 3$-ra $2 \cdot 3 = 6 < 4^3$, tehát igaz az állítás. (Igaz $n = 2$-re is.)

Tegyük fel tehát, hogy az egyenlőtlenséget igazoltuk már a páratlan számokra egészen $2k-1$-ig. Bebizonyítjuk, hogy ekkor $2k+1$-re is fennáll.

Válasszuk szét a $2k+1$-nél kisebb prímszámok szorzatát a $k+1$-ig terjedő prímszámok szorzatára, és a $k+1$ és $2k+1$ közötti prímszámok szorzatára. Az utóbbiról a 14. feladatból tudjuk, hogy kisebb 4^k-nál. A $k+1$-ig terjedő számokra viszont az indukciós feltevés szerint már tudjuk, hogy szorzatuk 4^{k+1}-nél kisebb. E kettőből viszont következik, hogy az összes $2k+1$-ig terjedő prímszámok szorzata kisebb, mint a fentiekből kapott $4^{k+1} \cdot 4^k = 4^{2k+1}$ érték.

Ezzel állításunkat teljes indukcióval igazoltuk páratlan n-ekre. Ha $n > 2$ páros, akkor nem prímszám s így n-ig ugyanazok a prímszámok fordulnak elő, mint $n-1$-ig, ami már páratlan, így a bebizonyított tétel szerint ezek szorzata legfeljebb 4^{n-1}, vagyis kisebb 4^n-nél, amit bizonyítanunk kellett.

16. *Tegyük fel, hogy n és $2n$ között nincs prímszám. Mutassuk meg, hogy akkor $\dbinom{2n}{n}$ nem lehet nagyobb, mint $(2n)^{\frac{\sqrt{2n}}{2}-1}\, 4^{\frac{2n}{3}}$ feltéve, hogy $n > 100$.*

Megoldás: A 11. feladatban láttuk, hogyha n és $2n$ között nincs prímszám, akkor

$$(1) \qquad \binom{2n}{n} \le (2n)^r N_3,$$

ahol r a $\sqrt{2n}$ alatti prímszámok száma, N_3 a $\sqrt{2n}$ és $\dfrac{2n}{3}$ közé eső prímszámok szorzata. Mivel r számú prímszám van $\left[\sqrt{2n}\right]$-éig is, így a 12. feladat megoldása azt adja, hogy $r \le \dfrac{\left[\sqrt{2n}\right]}{2} - 1 \le \dfrac{\sqrt{2n}}{2} - 1$. N_3-at pedig növeljük akkor, ha nemcsak a $\sqrt{2n}$ és $\dfrac{2n}{3}$ közötti prímszámok szorzatát vesszük, hanem minden $\dfrac{2n}{3}$-nál kisebb prímszám szorzatát. Ez a 15. feladat alapján nem lehet nagyobb $4^{\frac{2n}{3}}$-nál. Így az (1) egyenlőtlenségben $(2n)^r\, N_3$ mindkét tényezője helyett egy, legalább ugyanakkora számot írva, kapjuk, hogy

$$\binom{2n}{n} \le (2n)^{\frac{\sqrt{2n}}{2}-1} 4^{\frac{2n}{3}}.$$