I. megoldás. A feltételek alapján

$$0 = c \cdot 1 - b^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i^2 a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} i a_i\right)^2,$$

ahonnan a műveletek elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$0 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (i^2 - 2ij + j^2) a_i a_j.$$

A jobb oldalon nem-negatív tagok állnak, így összegük csak úgy lehet nulla, ha mindegyik tag értéke külön-külön nulla. Ez pedig azt jelenti, hogy minden $1 \leqq i \leqq j \leqq n$ párra $a_i a_j = 0$, vagyis az a_1, a_2, …, a_n számok közül legalább $n-1$ zérus. Az n-edik érték $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$ alapján 1, legyen ez – mondjuk – a_k. Ekkor $b = \sum\limits_{i=1}^{n} i a_i = k \cdot a_k = k$, egész szám. Ezzel a feladat állítását beláttuk.

II. megoldás. Ha a számegyenes 1, 2, …, n pontjaiba rendre a_1, a_2, …, a_n egységnyi tömeget helyezünk el, a tömegrendszer súlypontja b-ben lesz. Azt, hogy a tömeg milyen mértékben szóródik a súlypontja körül, általában a

$$d = \sum_{i=1}^{n} (i-b)^2 a_i$$

mennyiséggel mérjük. Ez a mennyiség definíciója szerint nem negatív, és csak akkor lehet 0-val egyenlő, ha a fenti összeg minden tagja 0. Mivel az a_i-k összege 1, nem lehet mindegyikük 0-val egyenlő. Az $(i-b)^2$ tényezők közül viszont csak legfeljebb egy lehet 0-val egyenlő, ez is csak úgy, ha b egész, és i egyenlő vele. Ha tehát $d=0$, akkor b egész, így elegendő azt bizonyítani, hogy $d=0$. Ha elvégezzük a négyzetreemelést, kapjuk, hogy

$$d = \sum_{i=1}^{n} i^2 a_i - 2b \sum_{i=1}^{n} i a_i + b^2 \sum_{i=1}^{n} a_i = c - b^2,$$

ha tehát $c = b^2$, akkor d értéke valóban 0.

Megjegyzés. Mivel $d \geqq 0$, megoldásunkból az is következik, hogy $c \geqq b^2$ mindig teljesül, vagyis

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 a_i \geqq \left(\sum_{i=1}^{n} i a_i\right)^2.$$

Hasonlóan látható be általában, hogy ha $a_i \geqq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$, és x_1, …, x_n tetszőlegesek, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 a_i \geqq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_i\right)^2.$$