1. *Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be a Simson-egyenesekről szóló tétel megfordítását.*

Megoldás: A tétel megfordítása így szól: Ha egy pontból az $ABC\triangle$ oldalaira bocsátott merőlegesek talppontjai egy egyenesen vannak, akkor e pont az $ABC\triangle$ köré írt körön van.

Legyen ugyanis P egy ilyen pont, és A_1 a BC oldalra (vagy meghosszabbítására) bocsátott merőleges talppontja. Legyen továbbá az A_1 pontban BC-re húzott merőlegesnek a háromszög köré írt körrel való metszéspontja P' és P''. Azt kell bizonyítanunk, hogy P valamelyikkel összeesik. A Simson-tétel szerint P'-ből és P''-ből az oldalakra bocsátott merőlegesek talppontjai egy-egy – A_1-en átmenő – egyenesen feküsznek. Forgassunk egy egyenest az A_1 pont körül és húzzunk az AC és BC oldallal való metszéspontjaiból a megfelelő oldalra merőlegest. Ezeknek a merőlegeseknek az A_1-ben BC-re húzott merőlegessel való metszéspontjai végigfutnak ezen az egyenesen, mégpedig ellenkező irányban (mikor a forgatott egyenes az AC, ill. BC-vel párhuzamos helyzeten áthalad, akkor e metszéspont az A_1-ben húzott merőleges ellenkező vége felől továbbra is az előbbi irányban haladva folytatja útját). E közben tehát a két merőlegesnek a harmadikkal való metszéspontja csak két esetben eshet össze. Vagyis az A_1-ben húzott merőlegesnek valóban csak a P' és P'' pontja rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. P tehát nem lehet ezektől különböző.

2. *Hogyan bizonyíthatjuk be a 137. feladatban kitűzött tételt a Simson-egyene-sekről tanultak segítségével?*

137. *Húzzunk a síkban négy egyenest úgy, hogy bármely kettő messe egymást, de háromnak ne legyen közös metszéspontja. Ezek négy háromszöget határoznak meg. Bizonyítsuk be, hogy ezek köré írt négy körnek van egy közös metszéspontja.*

Megoldás: Legyen a négy egyenes a, b, c, d. Szemeljünk ki az ezek által alkotott háromszögek közül kettőt, legyen ez mondjuk az a, b, c és a b, c, d egyenesek közti háromszög. E két háromszög köré írt köröknek a közös csúcstól különböző metszéspontját jelöljük F-fel. Láttuk, hogy e pontból az a, b, c, d egyenesekre bocsátott merőlegesek A_1, B_1, C_1, D_1 talppontjai egy s egyenesre esnek (az F pontnak bármely háromszögre nézve Simson egyenesére). De ekkor az s egyenesnek az a, c, d egyenesek közti háromszög oldalaival való metszéspontjában és az a, b, d, egyenesek köztiéivel való metszéspontjaiban emelt merőlegesek is rendre egy ponton, az F ponton mennek keresztül. Így a Simson-egyenesek tétele előbbi megfordításának értelmében F rajta fekszik az utóbbi két háromszög köré írt körön is, mind a négy háromszög köré írt kör tehát F-en megy keresztül.

3. *Bizonyítsuk be, hogy egy parabolának egy tetszőleges érintőjére a fókuszból merőlegest húzva a talppontja a parabola csúcsában húzott érintőre esik.*

Megoldás: Legyen a parabola fókusza F, csúcsérintője s és vezéregyenese m; a parabola egy tetszőleges pontja P, végül a P-ből az m-re bocsátott merőleges talppontja Q. A parabola értelmezése szerint $QP = PF$. Húzzunk most a Q-n át PF-fel párhuzamost, messe ez a parabola tengelyét P'-ben. Tudjuk, hogy a parabola P pontbeli érintője a $QPF\sphericalangle$ felezője, tehát $QPFP'$ rombusz lévén, egybeesik a PP' átlóval. Ez az átló merőleges az FQ átlóra és felezi azt. Ekkor azonban a két átló metszéspontja, ami egyben az F-ből a P pontban húzott érintőre bocsátott merőleges talppontja, rajta fekszik az s csúcsérintőn. Ezzel igazoltuk állításunkat.

4. *A cikk jelöléseit használva bizonyítsuk be, hogy azon parabolát, melynek fókusza F és a csúcsponti érintője s, az a, b, c és d egyenes érinti.*

Megoldás: Megmutatjuk, hogy pl. az a egyenes érinti a kérdéses parabolát. Legyen A_1 az F-ből a-ra bocsátott merőleges talppontja. F-et az A_1 pontra tükrözve m-en fekvő Q pontot kapunk. A Q-ban m-re bocsátott merőleges metszéspontja a-val legyen P. Mivel a az FQ szakasz középmerőlegese, így $FP = PQ$ és a felezi az $FPQ\sphericalangle$-et. Ez éppen azt jelenti, hogy P a kérdéses parabolán fekszik, és a a parabola P pontban húzott érintője.