1. *Ha a 3. ábrán látható berendezésnél*[1] *egy lyukas vonalzót használunk, melyet ráakasztunk az U szögre, akkor az U pont bizonyos távolságra lesz a vonalzó szélétől. Igaz-e, hogy akkor csak hozzávetőleg kapunk hiperbolaágat? Határozzuk meg a keletkező görbe egyenletét alkalmasan választott koordinátarendszerben.*

Megoldás: Legyen a két tű, F_1 és F_2, távolsága l. Ezeken át válasszuk az X tengelyt és azon a tűn át, melyre a vonalzót akasztjuk, az Y tengelyt. E tűnek (ezt jelöljük F_1-gyel) a vonalzó szélétől való távolsága legyen t, a távolság talppontja T. A ceruza P hegyének T-től mért (változó) távolságát jelöljük z-vel. Ekkor $PF_2 = z - d$, ahol d a berendezés alapszakasza. Mivel F_1P az F_1TP derékszögű háromszög átfogója,

$$F_1P^2 = x^2 + y^2 = t^2 + z^2; \qquad F_2P^2 = (x-l)^2 + y^2 = (z-d)^2.$$

A kettő különbségéből

$$l(2x-l) = d\ (2z-d) + t^2, \text{ azaz } z = \frac{l}{d}x - \frac{l^2+t^2-d^2}{2d},$$

ezt az első egyenletbe helyettesítve és átrendezve (x együtthatójával osztva az egyenletet) az

$$x^2 - \frac{l(e^2+t^2-d^2)}{l^2-d^2}x - \frac{d^2}{l^2-d^2}y^2 + \frac{\left(l^2+t^2-d^2\right)^2 + 4d^2t^2}{4(l^2-d^2)} = 0.$$

x és y^2 együtthatóját és az állandó tagot rendre $-p$, $-q$, r-rel jelölve az egyenlet ilyen alakra hozható:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 - qy^2 = \frac{p^2}{4} - r.$$

Ez hiperbola egyenlete, mert $l > d$ lehet csak, s így q pozitív. A középpont abszcisszája

$$\frac{p}{2} = \frac{l}{2}\left(1 + \frac{t^2}{l^2-d^2}\right).$$

A tengelyek fél hosszára pedig

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - r} = \frac{d}{2}\left(1 - \frac{t^2}{l^2-d^2}\right)$$

és

$$\frac{\sqrt{\frac{p^2}{4} - r}}{q} = \frac{l^2+t^2-d^2}{\sqrt{l^2-d^2}}$$

adódik.

2. *Határozzuk meg azon pontok geometriai helyét, amelyek két körtől egyenlő távolságra vannak.*

Megoldás: Egy P pont és egy görbe távolságán értjük a legrövidebb utat, amelyen a pontból a görbéhez eljuthatunk. A körnél ez az út a pontot a kör középpontjával összekötő egyenesen fekszik, annak a P-től a kör P-hez közelebbi metszéspontjáig terjedő szakasza adja.

Jelöljük a feltételt kielégítő P pont köröktől való távolságát d-vel, a körök sugarát r_1, r_2-vel (legyen pl. $r_1 < r_2$), a középpontokat O_1, O_2-vel. Ha mind a két körön kívül fekszik a pont, akkor $PO_1 = d + r_1$, $PO_2 = d + r_2$, tehát $PO_2 - PO_1 = r_2 - r_1$. Ez mindig lehetséges, ha nincs az egyik kör a másik belsejében, mert akkor

$$PO_2 - PO_1 \leq O_1O_2 < r_2 - r_1.$$

Ezen pontok egy olyan hiperbolaágon feküsznek, melynek fókuszai a körök középpontjai. Ha a P pont az egyik pl. az r_1 sugarú körön belül, a másikon kívül van; akkor $O_1P = r_1 - d$, $O_2P = r_2 + d$ s így $OP_1 + OP_2 = r_1 + r_2$. (Ez mindig lehetséges, ha a két körnek van közös pontja. Ha nincs, akkor $r_1 + r_2 < O_1O_2 \leq O_1P + PO_2$.) Ezen pontok egy ellipszisen feküsznek, melynek fókuszai a körök középpontjai.

Összefoglalva a keresett mértani hely, ha a 2 kör egymáson kívül fekszik, egy hiperbolaág, mely egyenessé fajul, ha a két kör egyenlő sugarú. Ha az egyik kör belsejében tartalmazza a másikat, akkor a mértani hely egy ellipszis, melynek fókuszai a körközéppontok. Ha a két kör koncentrikus, az ellipszisből kör lesz. Ha a köröknek 2 közös pontjuk van, akkor a mértani hely egy hiperbolaágból és egy ellipszisből áll. Ha a körök kívülről érintik egymást, az ellipszis a két középpont közti egyenesszakasszá fajul el. Ha belülről érintik egymást a körök, akkor a hiperbola fajul el egy félegyenessé, mely a kisebb kör középpontjából indul és átmegy az érintési ponton.

[1] Lásd e kötet 66. oldalán.