1. *Mely számtól kezdve lesz*

$$\pi(x) \leqq \frac{x}{3}?$$

Megoldás: Annak megmutatásához, hogy $\pi(x) \leqq \frac{x}{2}$ azt használtuk fel, hogy két egymás után következő szám közül az egyik páros, tehát, ha 2-nél nagyobb, akkor nem lehet prímszám. Annak megmutatásához, hogy valahonnan kezdve $\pi(x) \leqq \frac{x}{3}$ vegyük igénybe a 3-mal osztható számokat is. Ha három egymás utáni számot veszünk, ezek egyike osztható 3-mal és legalább egy páros, de, ha csak három számot vizsgálunk, akkor nem mondhatjuk, hogy ezek kétharmada összetett, mert lehet, hogy a középső osztható 2-vel és hárommal is, azaz 6-tal a másik kettő meg prím, mint például 41, 42, 43. Jobb lesz azért $2 \cdot 3$, azaz hat számot vennünk. Ezek közül egy mindig osztható 6-tal, még további kettő lesz páros, és még egy osztható 3-mal. Így tehát 6 szám közül legfeljebb 2 lehet prímszám, ha az első szám legalább 4 (azaz a számoknak legfeljebb 1/3-a):

$$\pi(x+6) \leqq \pi(x) + 2, \quad \text{ha} \quad x > 3.$$

Tegyük fel most, hogy létezik egy olyan x, melyre a $\pi(x) \leqq \frac{x}{3}$, akkor előbbi eredményünkből

$$\pi(x+6) \leqq \pi(x) + 2 \leqq \frac{x}{3} + 2 = \frac{x+6}{3},$$

vagyis, ha a tétel igaz x-re, igaz $x+6$-ra is. 6 egymás utáni számot kell tehát keresnünk, melyekre a tétel igaz, akkor tudjuk, hogy onnan minden x-re igaz. 30 az első olyan szám, amire a tétel igaz, mert $\pi(30) = 10 = \frac{30}{3}$ $\cdot$31 és 32-re ismét nem igaz. $\pi(33) = 11 = \frac{33}{3}$, $\pi(34) = 11 < \frac{34}{3}$, $\pi(35) = 11 < \frac{35}{3}$, $\pi(36) = 11 < \frac{36}{3}$, $\pi(37) = 12 < \frac{37}{3}$, $\pi(38) = 12 < \frac{38}{3}$.

Tehát $\pi(x) \leqq \frac{x}{3}$, midőn $x \geqq 33$.

2. *Keressétek az $ax + by = c$ elsőfokú határozatlan egyenletnek egész x, y megoldását, ha a, b, c egész számok.*

3. *Hogyan lehet az előbbi egyenlet összes megoldásait előállítani? Mi a feltétele annak, hogy legyen ilyen megoldás?*

Megoldás: 2. Először is, nyilvánvaló, hogy c-nek oszthatónak kell lennie $(a, b) = d$-vel, mert a is osztható vele, b is, tehát ha x és y bármilyen egész számok, az $ax+by$ összegből mindig kiemelhető a d közös tényező. Azonban ez a feltétel elegendő is. Tudjuk ugyanis, hogy a és b legnagyobb közös osztója előállítható a következő alakban: $d = (a, b) = a\xi + b\eta$, ahol ξ és η valamilyen egész szám. Mivel $c = dc_1$, ezt az egyenletet c_1-gyel szorozva:

$$a\ \xi\ c_1 + b\ \eta\ c_1 = dc_1 = c$$

és így $c_1\xi$ és $c_1\eta$ kielégítik a megoldandó egyenletet.

3. Feltehetjük, hogy a és b relatív prímek, mert, ha nem volnának azok, végigoszthatunk legnagyobb közös osztójukkal, lévén evvel c is osztható. Legyen x_0, és y_0, az egyenletnek megoldása, akkor $ax_0 + by_0 = c$ és tegyük fel, hogy x és y is kiélégítik az egyenletet, azaz $ax + by = c$. A két egyenlet jobb oldala egyenlő lévén, baloldaluk is egyenlő:

$$ax_0 + by_0 = ax + by,$$

vagyis

$$a(x_0 - x) = b(y - y_0).$$

Mivel a és b relatív prímek, kell, hogy pl. $(y - y_0)$ osztható legyen a-val $(y - y_0) = at$, ebből következik, hogy $x_0 - x = bt$ és így $y = y_0 + at$ és $x = x_0 - bt$ alakban írhatók az egyenlet összes gyökei. Fordítva bebelyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy minden ilyen alakú számpár megoldása az egyenletnek, tehát $x = x_0 - bt$, $y = y_0 + at$, ahol $t = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$, az egyenlet összes megoldásait szolgáltatja.

4. *Számítsuk ki az $x^2 + x + 41$ kifejezés értékét különböző egész helyeken és bontsuk törzstényezőkre. Igaz-e, hogy a kifejezés minden egész x-re törzsszámot állít elő?*

5. *Bizonyítsuk be, hogy egy egyváltozós polinom, akárhányad fokú, nem állíthat elő a változó minden egész értékére prímszámot.*

Megoldás: 4. Ennek a függvénynek az az érdekessége, hogy igen sok számra, köztük a 0-tól 40-ig, és -40-ig terjedőkre prímszámot állít elő. Mégis könnyen belátható, hogy a második kérdésre tagadó a válasz. Például az $x = 41$ helyen a függvény értéke $41^2 + 41 + 41 = 43 \cdot 41$ nem prímszám.

5. Hasonlóan találhatunk minden polinomhoz olyan egész helyet, ahol összetett szám az értéke. Jelöljük a polinomot $f(x)$-szel.

Ha $f(x)$-nek nincs állandó tagja, akkor az x minden tagból kiemelhető, így a polinom mindig osztható x-szel. Az x kiemelése után maradó polinom értéke viszont nem lehet minden egész helyen 1, mert ha $g(x)$ egy ilyen polinom volna, akkor a $g(x)-1=0$ algebrai egyenletnek végtelen sok gyöke volna, de egy egyenletnek nem lehet több gyöke, mint ahányad fokú.

Ha a polinomnak van állandó tagja, és az nem 1, ezt jelöljük c-vel. A többi tagból kiemelhető x, s így a polinom így írható: $f(x)=xg(x)+c$. Így $f(cy)=c\big[yg(cy)+1\big]$. A zárójelben levő polinom értéke pedig nem lehet minden egész y-ra 1.

Ha az állandó tag 1, akkor először keressünk egy olyan a helyet, ahol $f(a)$ se nem 0 se nem 1. Ilyen hely biztosan van, mert az $f(x)=0$ és $f(x)=1$ egyenleteknek összesen is csak véges számú megoldása lehet. x helyett $y+a$-t írva és a hatványozásokat elvégezve y-nak egy polinomját kapjuk: $g(y)=f(a+y)$. Ennek az állandó tagja ugyanaz, mint a 0 helyen való értéke: $g(0)=f(a)$, ami se nem 0 se nem 1. Így a $g(y)$ polinomra már alkalmazhatjuk az előbbi meggondolást, tehát van egy olyan y_0 hely, ahol $g(y_0)=f(y_0+a)$ összetett szám.

6. *Adva vannak a térben egyenesek, melyek páronkint metszik egymást, de semelyik három nem fekszik egy síkban. Bizonyítsuk be, hogy az összes egyenesek egy ponton mennek keresztül.*

Megoldás: A tétel bizonyítása ugyanúgy történhetik, mint a cikkben a hasonló síkbeli hamis bizonyítás, csak most három egyenes esetén is igaz a tétel s így már helyes bizonyítást kapunk.

Két egyenes esetén az állítás a feltételekben már benne foglaltatik. Egy harmadik egyenes nem metszheti az első kettőt azok metszéspontjától különböző pontban, mert akkor benne feküdne azok síkjában. Így három egyenes esetére is igaz a tétel.

Tegyük fel, hogy bebizonyítottuk már a tételt k számú és $k-1$ számú egyenes esetére is ($k \geqq 3$) Megmutatjuk, hogy akkor igaz $k+1$ olyan egyenesre is, melyek eleget tesznek a feltételnek. Ha egy egyenest elveszünk a maradó k az indukciós feltevés szerint tudjuk, hagy egy ponton megy keresztül. Jelöljük az elvett egyenest a-val. Vegyünk el helyette most egy másik b egyenest. Ismét k egyenes marad. Ezek tehát szintén egy ponton mennek keresztül. Az első ponton átmegy b is, a másikon a is. Így azt kell még belátni, hogy ez a két pont azonos. Vegyük el most a-t is b-t is. A maradó $k-1$ egyenesre is igaz a tétel az indukciós feltevés szerint, tehát kell, hogy ezek is egy ponton menjenek keresztül és ez egy meghatározott pont ($k-1$, tehát legalább 2 különböző egyenesről van szó, ezeknek pedig nem lehet 1-nél több közös pontjuk). Ezen a ponton kell tehát a-nak és b-nek is átmennie, azaz mind a $k+1$ egyenesnek.

Mivel két kezdő értékre, 2-re és 3-ra a tétel igaz, így most már következik, hogy igaz akárhány egyenesre.

7. *Mutassuk meg, hogy*

$$\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}+\ldots+$$
$$+\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)}=$$
$$=1-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n).}$$

I. megoldás: Jelöljük a baloldali összeget S_n-nel. Teljes indukcióval következőképpen bizonyítható az állítás. Nézzük meg, igaz-e a tétel $n=1$-re. Ekkor $S_1=\frac{a_1}{1+a_1}$. A jobboldalon $1-\frac{1}{1+a_1}=\frac{1+a_1-1}{1+a_1}=\frac{a_1}{1+a_1}$ van, tehát $n=1$-re a tétel igaz.

Tegyük fel most, hogy a tétel igaz valamilyen $n=k$-ra, azaz

$$S_k=1-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)}.$$

Adjuk mindkét oldalhoz hozzá a $k+1$-edik tagot:

$$S_{k+1}=S_k+\frac{a_{k+1}}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)(1+a_{k+1})}=$$
$$=1-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)}+$$
$$+\frac{a_{k+1}}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)(1+a_{k+1})}=$$
$$=1-\left[\frac{1+a_{k+1}}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)(1+a_{k+1})}-\right.$$
$$\left.-\frac{a_{k+1}}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)(1+a_{k+1})}\right]=$$
$$=1-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)(1+a_{k+1}),}$$

és így a tétel igaz $n=(k+1)$-re is. Ezzel megmutattuk, hogy a tétel igaz minden n-re.

II. megoldás: A teljes indukciós megoldás nem mutatja meg azonban, miért igaz a tétel. Ennek okát a következőképen láthatjuk.

A sorozat k-adik tagját így lehet felírni:

$$\frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_{k-1})(1+a_k)}=$$
$$=\frac{(1+a_k)-1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_{k-1})(1+a_k)}=$$
$$=\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_{k-1})}-$$
$$-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_{k-1})(1+a_k)},$$

és így

$$S_n=\left(1-\frac{1}{1+a_1}\right)+\left(\frac{1}{1+a_1}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)}\right)+\dots+$$
$$+\left(\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_{k-1})}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_k)}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_k)}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_{k+1})}\right)+$$
$$+\dots+\left(\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_{n-2})}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_{n-1})}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_{n-1})}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}\right)=$$
$$=1-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}.$$

8. *Mutassuk meg hogy:*

$$\sin\alpha+\sin 2\ \alpha+\dots\dots+\sin n\alpha=\frac{\sin\dfrac{n\alpha}{2}\sin\dfrac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}.$$

I. megoldás: Jelöljük a baloldali összeget S_n-nel. Ha $n=1$, a jobboldalon

$$\frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}=\sin\alpha=S_1$$

áll. Tegyük fel most, hogy a tétel igaz $n=(k-1)$-re, vagyis

$$S_{k-1}=\frac{\sin\dfrac{(k-1)\alpha}{2}\sin\dfrac{k\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Adjunk mindkét oldalhoz $\sin k\alpha$-t.

$$S_k = S_{k-1} + \sin k\alpha = \frac{\sin\frac{(k-1)\alpha}{2}\sin\frac{k\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \sin 2\frac{k\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\sin\frac{(k-1)\alpha}{2}\sin\frac{k\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{k\alpha}{2}\cos\frac{k\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{k\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{(k-1)\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{k\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sin\frac{k\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left[\sin\frac{(k-1)\alpha}{2} + \left(\sin\frac{(k+1)\alpha}{2} - \sin\frac{(k-1)\alpha}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{\sin\frac{k\alpha}{2}\sin\frac{(k+1)}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

és így a tétel igaz $n = k$-ra is. Ezzel megmutattuk, hogy a tétel igaz minden n-re.

II. megoldás: A jobboldal mutatja, hogy $S_n \sin\frac{\alpha}{2}$-et lesz célszerű megpróbálni átalakítani:

$$S_n \sin\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2} + \sin 2\alpha\sin\frac{\alpha}{2} + \ldots + \sin n\alpha\sin\frac{\alpha}{2},$$

de

$$\sin k\alpha\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{(2k-1)\alpha}{2} - \cos\frac{(2k+1)\alpha}{2}\right)$$

és így

$$S_n \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{3\alpha}{2}\right) + \left(\cos\frac{3\alpha}{2} - \cos\frac{5\alpha}{2}\right) + \right.$$

$$+\left(\cos\frac{5\alpha}{2} - \cos\frac{7\alpha}{2}\right) + \ldots + \left(\cos\frac{(2n-3)\alpha}{2} - \cos\frac{(2n-1)\alpha}{2}\right) +$$

$$\left. + \left(\cos\frac{(2n-1)\alpha}{2} - \cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}\right) = \sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2},$$

vagyis

$$S_n = \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$