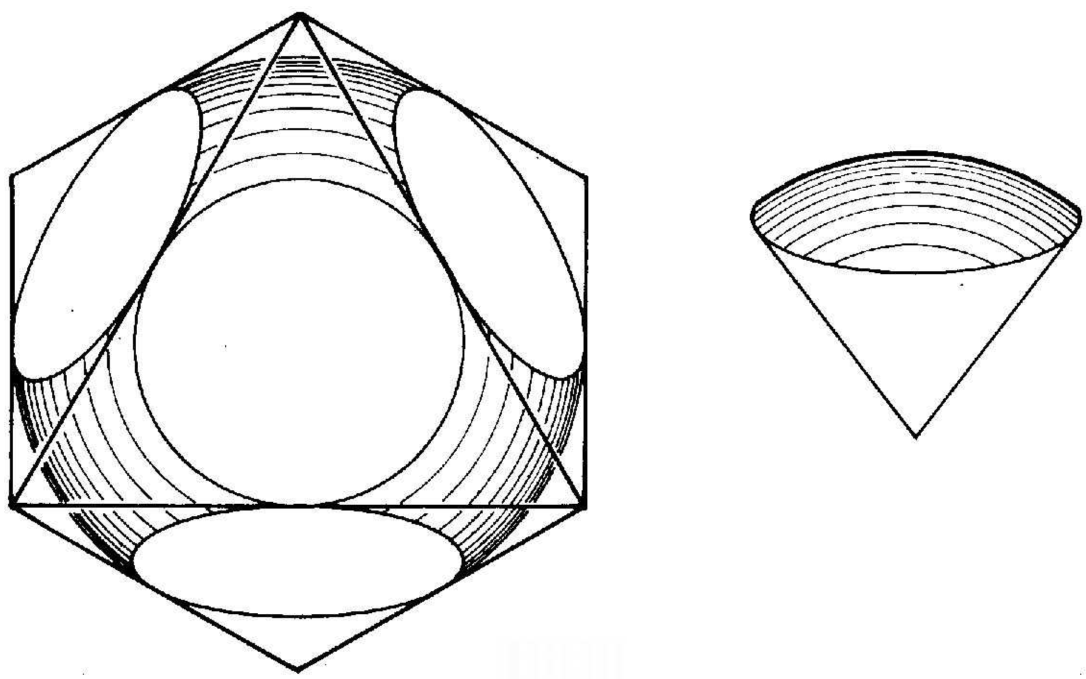
Mindenekelőtt megvizsgáljuk, hogy a szóban forgó gömb (nevezzük röviden félig beírt gömbnek) valóban létezik-e, és egyértelműen meghatározott-e.

A szabályos oktaéder és a gömb is középpontosan szimmetrikus test. A félig beírt gömb középpontjának az oktaéder középpontjába kell esnie. Ha ugyanis ez nem így volna, akkor a félig beírt gömböt az oktaéder középpontjára tükrözve újabb félig beírt gömböt kapnánk, amely az előbbiből eltolással is megkapható. Az eltolás során azonban a gömb nem mozoghat az oktaéder minden élével párhuzamosan, így az újabb gömb mégsem lehetne félig beírt gömbje oktaéderünknek.

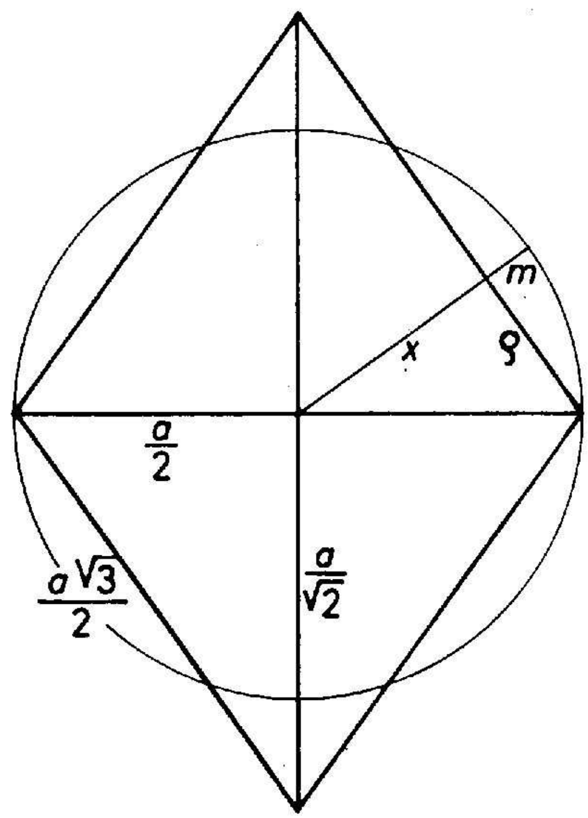
Ebből az következik, hogy az oktaéder középpontján átmenő bármely sík a keresett gömböt főkörben metszi. Ilyen síkok azok is, amelyek az oktaéder négy-négy élét tartalmazzák. Egy síkban levő négy él négyzetet alkot. A négyzetbe írt kör a gömb főköre. Jelöljük a-val az oktaéder éleinek hosszát. A félig beírt gömb sugara: $R=\dfrac{a}{2}$.



1. ábra

Az oktaéder csúcsainak legömbölyítésével az oktaéder és a félig beírt gömb közös részéhez jutunk. Ezt kapjuk akkor is, ha a félig beírt gömbből eltávolítjuk az oktaéder lapjai által levágott gömbszeleteket (1. ábra). A szabályos oktaéder szimmetriája, alapján e gömbszeletek egybevágóak. A gömbszeletek alapkörei az oktaéder lapjainak beírt körei, sugaruk tehát: $\varrho=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

A gömbszeletek magasságát olyan síkmetszetből határozhatjuk meg, amelynél a metsző sík egyben a gömbszelet szimmetriasíkja.



2. ábra

A 2. ábrán az oktaéder négy lapmagasságán átmenő síkmetszet látható. A metsző sík merőleges a gömbszeleteket levágó lapokra, és tartalmazza a gömb középpontját, tehát a gömbszeletek szimmetriasíkja. Az ábrán x-szel jelölt szakasz a lapok távolsága az oktaéder középpontjától, más szóval az oktaéderbe írható gömb sugara. Pitagorász tétele alapján :

$$x = \sqrt{R^2 - \varrho^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}a.$$

A gömbszeletek magassága:

$$m = R - x = \frac{3 - \sqrt{6}}{6}a.$$

A test felszínét úgy kapjuk, hogy a félig beírt gömb felszínéből a 8 levágott gömbszelet palástjának *(gömbsüvegnek)* felszínét levonjuk, alapköreik területét pedig a kapott értékhez hozzáadjuk. Így

$$F = 4\pi R^2 - 8(2\pi Rm) + 8\pi\varrho^2 = \pi\frac{4\sqrt{6} - 7}{3}a^2 \ (= a^2 \cdot 2{,}93).$$

A test térfogata úgy adódik, hogy a félig beírt gömb térfogatából a 8 levágott gömbszelet térfogatát levonjuk.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - 8 \cdot \frac{\pi}{3}m^2(3R - m) = \pi\frac{14\sqrt{6} - 27}{54}a^3 \ (= a^3 \cdot 0{,}4243).$$

(A gömbsüveg felszínének és a gömbszelet térfogatának kiszámításához felhasznált képletek megtalálhatók az iskolai függvénytáblázatban.) **(L.L.)**

Reviczki Zoltán (Mezőkövesd, I. László Gimn., IV. o. t.)